



Уральский
федеральный
университет

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт математики
и компьютерных наук

**А. И. КОРОТКИЙ
Ю. В. СТАРОДУБЦЕВА**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Н. КРАСОВСКОГО

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева

Моделирование прямых
и обратных граничных задач
для стационарных моделей
теплопереноса

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 519.6

К 687

Рецензент

В . Г . П и м е н о в, доктор физико-математических наук,
профессор (Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б.Н. Ельцина);

Научный редактор

А . Б . Л о ж н и к о в, кандидат физико-математических наук

Короткий, А. И.

К 687 Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса : [монография] / А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева ; науч. ред. А. Б. Ложников ; Федеральное агентство научных организаций, ИММ УрО РАН; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 168 с.

ISBN 978-5-7996-1606-9

Книга посвящена исследованию и численному моделированию прямых и обратных граничных задач для стационарных объектов тепломассопереноса. Описаны вычислительные эксперименты по восстановлению граничных режимов различной степени гладкости.

Для специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования. Книга также будет полезна студентам старших курсов и аспирантам.

УДК 519.6

ISBN 978-5-7996-1606-9

© Короткий А. И.,
Стародубцева Ю. В., 2015

Оглавление

Введение	5
Основные обозначения и соглашения	15
1. Прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии	18
1.1. Постановка прямой граничной задачи	20
1.2. Разрешимость и устойчивость прямой граничной задачи	28
1.3. Постановка обратной граничной задачи	37
1.4. Некорректность обратной граничной задачи . . .	45
1.5. Вариационный метод решения обратной задачи .	50
1.6. Метод квазиобращения решения обратной задачи	62
1.7. Метод Ньютона–Канторовича решения обратной задачи	67
1.8. Метод Ландвебера решения обратной задачи . .	75
1.9. Метод Левенберга–Марквардта решения обратной задачи	83
2. Прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости	90
2.1. Постановка прямой граничной задачи	92
2.2. Разрешимость и устойчивость прямой граничной задачи	97
2.3. Постановка обратной граничной задачи	101
2.4. Некорректность обратной граничной задачи . . .	105
2.5. Вариационный метод решения обратной задачи .	106
2.6. Метод квазиобращения решения обратной задачи	121
2.7. Метод Ньютона–Канторовича решения обратной задачи	126
2.8. Метод Ландвебера решения обратной задачи . .	135

2.9. Метод Левенберга-Марквардта решения обратной задачи	144
Приложение	152
Список литературы	155

Введение

При исследовании физических явлений или объектов эмпирическими методами достаточно часто возникают обстоятельства, при которых отсутствует возможность непосредственного наблюдения и измерения каких-либо характеристик объекта. Выполнение эксперимента может быть сопряжено с техническими и материальными трудностями, представлять угрозу или просто быть неосуществимым. При этом практически всегда имеется возможность получить какие-либо дополнительные сведения об изучаемом объекте, по которым можно было бы сделать выводы об искомых характеристиках и свойствах исследуемого объекта или процесса.

В описанной выше ситуации задача состоит в определении причины по полученным в результате наблюдений или экспериментов следствиям. Такие задачи относятся к классу обратных задач. В целом под *обратной задачей* понимается задача, состоящая в определении параметров модели по имеющимся результатам наблюдений за состояниями модели. При этом модель может описываться интегральными или дифференциальными уравнениями, операторными уравнениями или другими соотношениями.

Многие важные прикладные вопросы, касающиеся экологии, геофизики, сейсмологии, диагностики в медицине, компьютерной томографии, неразрушающего контроля и дефектоскопии, георадиолокации, приводят к обратным задачам. Например, в медицинской диагностике возникает обратная задача электрокардиографии, когда требуется восстановить потенциал электрического поля сердца на его внешней поверхности по данным регистрации потенциала на поверхности грудной клетки [11, 14]. Другим примером является задача электроразведки полезных ископаемых, когда требуется по измерениям характеристик электромагнитного поля на поверхности Земли определить электропроводность более глубоких слоев. Стоит

отметить исследование процесса распространения загрязнений, который может происходить в ситуации, в которой источники загрязняющего вещества расположены в месте, недоступном для прямых измерений, либо требуется восстановить параметры источника, используя дополнительную информацию о состоянии среды (например, значения концентрации загрязняющего вещества в местах, доступных прямому измерению).

По признаку искомой причинной характеристики можно выделить четыре основных класса обратных задач [9, 26, 56].

1. Коэффициентные задачи — заключаются в нахождении функций и параметров, составляющих коэффициенты модели.
2. Эволюционные (ретроспективные) задачи — состоят в восстановлении предыстории состояний некоторого известного состояния модели.
3. Граничные задачи — заключаются в нахождении функций и параметров, входящих в граничные условия модели.
4. Геометрические обратные задачи — заключаются в реконструкции геометрических характеристик некоторого множества, расположенного в области реализации модели.

Наряду с *обратными задачами*, с точки зрения соотношения причина—следствие, выделяются *прямые задачи*, в которых по известным причинам требуется определить следствие.

При формулировке постановок обратных задач предполагаются известными постановки прямых задач. Постановка прямой задачи подразумевает задание набора функций и параметров, определяющих модель (например, задание коэффициентов и параметров дифференциального уравнения, задание начальных и краевых условий — полностью определяет модель). При решении прямой задачи этому набору ставится в соответствие новый объект — состояние модели (решение соответствующей начально-краевой задачи для дифференциального уравнения). Предположим, что неизвестны некоторые функции или параметры, определяющие прямую задачу, но при этом можно получить некоторую дополнительную информацию о состоянии

ях или свойствах модели. Требуется определить (восстановить) недостающие функции. В этой ситуации имеем дело с обратной задачей.

Постановки прямых и обратных задач подразумевают предварительное моделирование реального процесса. Под моделированием понимается построение и изучение моделей реальных объектов, процессов или явлений с целью исследования свойств этих объектов, процессов или явлений. Моделирование является универсальным методом научного познания и играет важную роль в развитии науки и техники [60, 69, 93].

Процесс моделирования обычно разделяют на три этапа: математическая модель — алгоритм — программа. Программирование осуществляется после составления вычислительного алгоритма, который, в свою очередь, разрабатывается после полной постановки задачи в той или иной форме. Математическая модель может быть представлена в различных формах (вычислительный алгоритм, компьютерная программа, дифференциальные уравнения, функциональные уравнения).

В математической физике модели обычно задаются с помощью дифференциальных уравнений, дополненных начальными краевыми условиями. Основной, достаточно широкий класс, представляют задачи для уравнений в частных производных, в силу того, что такие уравнения могут описывать достаточно широкий класс процессов. Обычно, при исследовании установившихся (стационарных) процессов различной физической природы, приходят к уравнениям эллиптического типа.

Исследование краевых задач для эллиптических уравнений является важной составной частью теории дифференциальных уравнений в частных производных и имеет многочисленные приложения в задачах механики сплошных сред (теплоперенос, теория упругости), электродинамике и других областях науки и техники.

Теория общих краевых задач для уравнений эллиптического типа представляет собой вполне сложившуюся и достаточно

хорошо разработанную теорию [1, 2, 49]. Обычно здесь ведутся исследования для областей с достаточно гладкими границами и для уравнений с достаточно гладкими коэффициентами [1, 2]. Безусловно, имеется большой интерес и к изучению эллиптических задач в областях с негладкими границами и негладкими коэффициентами [35, 49]. Отметим также, что теория эллиптических краевых задач со смешанными граничными условиями (на двух или более участках границы задаются граничные условия различных типов) оказывается сложнее, в этом направлении отметим работы [95, 116].

При изучении краевых задач математической физики достаточно часто (например, при рассмотрении задач в негладких областях, задач со смешанными граничными условиями, задач с разрывными коэффициентами) необходимо расширять классы функций, в которых осуществляется поиск решения. В этих ситуациях от классических постановок задач переходят к обобщенным формулировкам, к введению понятия обобщенного решения.

Решение обратных задач может быть сопряжено с рядом проблем.

1. Решение может быть неединственным и дополнительных сведений может быть недостаточно для обеспечения единственности.
2. Достаточно часто искомая функция или параметр входят в операторное или функциональное уравнение нелинейным образом.
3. Исходная информация известна приближенно, т. к. измерительные приборы дают некоторую погрешность.
4. Может отсутствовать непрерывная зависимость решения обратной задачи от исходных данных, что приводит к необходимости разработки специальных методов решения обратных задач.

Если решения обратной задачи не существует (исходные данные могут противоречить друг другу), или нарушается

условие единственности решения (недостаток дополнительных сведений о решении), или нет непрерывной зависимости решения от исходных данных, тогда задача называется некорректной по Адамару [3]. В обратных задачах, как правило, нарушается условие непрерывной зависимости решения от входных данных.

Основополагающий вклад в развитие теории и практических методов решения некорректных задач внесли А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев. Большой вклад в развитие теории обратных и некорректных задач внесли А. Л. Агеев, Г. В. Алексеев, О. М. Алифанов, Д. С. Аниконов, Ю. Е. Аниконов, В. Я. Арсенин, А. Б. Бакушинский, А. Л. Бухлейм, В. В. Васин, Ф. П. Васильев, Г. М. Вайникко, В. Б. Гласко, А. В. Гончарский, А. М. Денисов, С. И. Кабанихин, А. В. Кряжковский, А. С. Леонов, О. А. Лисковец, В. И. Максимов, Г. И. Марчук, И. В. Мельникова, Л. Д. Менихес, В. А. Морозов, Ю. С. Осипов, В. В. Пененко, А. И. Прилепко, В. Г. Романов, В. П. Танана, А. Г. Ягола и многие другие ученые. Достаточно подробно теория обратных и некорректных задач представлена в работах [9, 23, 24, 26, 48, 66, 91, 101, 103, 115].

Наиболее широкую область применения теории некорректных задач представляют собой обратные задачи. Разработка эффективных методов решения обратных задач позволила существенно упростить экспериментальные исследования, повысить точность и достоверность получаемых результатов за счет определенного усложнения алгоритмов обработки экспериментальных данных. При этом существенная часть работы проводится с использованием мощных вычислительных комплексов, что позволяет ускорить проведение экспериментальных исследований и открывает широкие возможности для их автоматизации.

В настоящее время обратные задачи находят многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Исследованию обратных задач посвящено большое количество

статей [4–7, 12, 16, 27–30, 62, 65, 72, 96], монографий [9, 26, 46, 47]. Этой тематике посвящено несколько журналов (международный журнал "Journal of Inverse and Ill-Posed Problems", журнал "Обратные задачи и информационные технологии", "Inverse Problems in Science and Engineering"), проводятся многочисленные конференции.

Значительный интерес представляет разработка эффективных численных методов решения некорректных и обратных задач, а также создание вычислительных алгоритмов для конкретных прикладных задач, например, геофизических задач гравитационной, тепловой и динамической реконструкции осадочных бассейнов [109, 111], литосферных плит [104, 108], мантийных плюмов [105–107] и задач по определению физических характеристик вулканической лавы [110].

Отметим некоторые подходы к решению обратных некорректных задач.

1. *Вариационный метод* [4, 9, 23, 26, 63, 68, 91]. Основная идея базируется на использовании дополнительной информации о решении. Исходная обратная задача сводится к некоторой равносильной задаче на нахождение минимума подходящего целевого функционала. Для приближенного решения вариационной задачи используются численные методы, которые применяются в экстремальных задачах. В частности, можно ориентироваться на использование градиентных методов.

2. *Итерационная регуляризация* [10, 15, 17, 20, 26]. Этот подход заключается в построении регуляризующих алгоритмов на основе различных итерационных методов. При этом задача предварительно может быть сведена к соответствующему операторному уравнению. Многие итерационные методы обладают определенной устойчивостью к погрешностям в исходных данных задачи. Итерационная регуляризация линейных некорректных задач изучена в настоящее время достаточно полно. Работ, посвященных нелинейным задачам, существенно меньше. В то же время, как показывают вычислительные экспери-

менты, итерационные алгоритмы решения нелинейных некорректных задач, построенные формально по той же схеме, что и для линейных задач, оказываются вполне работоспособными.

3. *Возмущение задачи* [26, 48, 52, 56]. Основная идея состоит в возмущении исходного уравнения и использовании дополнительных условий. Возмущение проводится так, чтобы новая задача становилась корректной. Параметров возмущения (регуляризации) может быть несколько.

Одним из важных классов обратных задач являются обратные задачи теплообмена и переноса вещества. В данной книге рассматриваются обратные граничные задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии и модели стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости.

Модели типа "реакция-конвекция-диффузия" применяются в различных областях науки и техники. Например, при моделировании переноса кислорода в кровеносной системе, при описании процессов распространения загрязняющих веществ в водоемах и атмосфере, при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле [57, 58, 67, 68].

Широко распространена в науке и технике модель тепловой конвекции высоковязкой жидкости. Такая модель используется, например, при исследовании геофизических процессов в земных недрах [105-107] и процессов изготовления стекла в плавильных печах [102].

Для рассматриваемых моделей наиболее часто рассматривают обратные коэффициентные задачи. В работах Г. В. Алексеева, Д. А. Терешко, О. В. Соболевой, И. С. Вахитова [4-8] исследуются обратные коэффициентные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии и моделей тепловой конвекции вязкой жидкости с регулярными граничными условиями, обратная задача сводится к решению соответствующей экстремальной задачи. В работе О. В. Соболевой [72] теоретически и численно исследуются обратные коэффициентные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии и классической модели

конвекции вещества в приближении Обербека–Буссинеска, обратные задачи также сводятся к решению соответствующих экстремальных задач. В работе А. В. Пененко [62] рассматривается обратная коэффициентная задача теплопроводности, которая сводится к решению соответствующей вариационной задачи.

Реже исследуются обратные граничные задачи для моделей тепловой конвекции. В работах А. И. Короткого и Д. А. Ковтунова [32, 33, 36, 39] теоретически и численно исследовались прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости со смешанными граничными условиями. В этих работах доказано существование и единственность слабого решения прямой задачи, устойчивость решения прямой задачи по отношению к входным данным и неустойчивость обратной задачи. Для решения обратной граничной задачи применялись вариационный метод и метод квазиобращения.

Целью данной книги являются теоретический и численный анализ прямой и обратной граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Рассмотрены две модели: модель стационарной реакции-конвекции-диффузии и модель стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости. Для соответствующих обратных граничных задач разработаны методы численного решения и приведены результаты вычислительных экспериментов. Основные результаты, представленные в данной книге, опубликованы в работах [40, 42–45, 73–89].

Прямая граничная задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на границе области протекания процесса. Обратная граничная задача состоит в нахождении подходящего следа от решения соответствующей краевой задачи на некоторой части границы области протекания процесса при известных данных и некоторых дополнительных граничных условиях на другой части границы области протекания процесса. Особенность прямой задачи

состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Особенность обратной задачи заключается в ее некорректности.

Первая глава посвящена теоретическому и численному исследованию прямой и обратной граничной задач для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Сначала формулируется прямая задача, вводятся соответствующие функциональные пространства и дается определение слабого решения рассматриваемой задачи. Далее доказываются существование и единственность слабого решения поставленной прямой задачи. Доказана корректность прямой задачи. Сформулирована обратная граничная задача. Доказана некорректность рассматриваемой обратной задачи.

Для решения обратной задачи предлагаются различные методы. Сначала исходная обратная задача сводится к соответствующей вариационной задаче. Приводится алгоритм решения вариационной задачи. Представлены результаты численного моделирования обратных задач с граничными режимами различной степени гладкости. Далее рассматривается метод квазиобращения, заключающийся во введении в основное уравнение дополнительного слагаемого с малым параметром. Приведены разностные схемы решения прямой и обратной задач, а также результаты численного моделирования обратных задач с граничными режимами различной степени гладкости. Далее обратная задача сводится к операторному уравнению, для решения которого предлагается модифицировать известные методы Ньютона–Канторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта. Представлены алгоритмы решения обратной задачи указанными модифицированными методами, описаны вспомогательные задачи, возникающие в процессе реализации этих методов. Приведены результаты численного моделирования обратных задач с граничными режимами различной гладкости.

Во второй главе численно исследуется обратная гранич-

ная задача для модели стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости. В начале главы формулируется прямая задача, вводятся соответствующие функциональные пространства и дается определение слабого решения данной задачи. Далее приводится формулировка теоремы существования и единственности слабого решения рассматриваемой задачи. Дается постановка обратной граничной задачи. Указывается ее неустойчивость.

Для решения обратной задачи предлагается, как и в первой главе, воспользоваться вариационным методом, методом квазиобращения и модифицировать известные методы Ньютона–Канторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта. Для каждого из этих методов описан алгоритм решения, выведены соответствующие вспомогательные задачи, необходимые для реализации рассмотренных методов. Приведены результаты численного моделирования решения обратных задач с граничными режимами различной степени гладкости.

Авторы приносят глубокую благодарность И. А. Цепелеву и Д. А. Ковтунову за разработку и тестирование некоторых модификаций алгоритмов решения обратных граничных задач для моделей высоковязкой жидкости. Авторы благодарны А. Т. Исмаил-Заде за плодотворные обсуждения постановок задач и полученных результатов. Авторы признательны В. В. Васину, А. Р. Данилину, В. В. Пененко, Г. В. Алексеву, М. И. Сумину за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Опубликование данной монографии стало возможным благодаря поддержке грантами РФФИ (проект 14-01-00155) и РНФ (проект 14-17-00520). В частности, исследования, представленные в параграфах 1.2-1.6 и 2.2-2.6, поддержаны грантом РФФИ, и представленные в параграфах 1.7-1.9, 2.7-2.9 грантом РНФ.

Основные обозначения и соглашения

\mathbb{N}	—	множество натуральных чисел;
\mathbb{R}	—	множество вещественных чисел;
\mathbb{R}^m	—	евклидово пространство m -мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с нормой $\ \mathbf{x}\ = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$;
Ω	—	ограниченная область (открытое связное множество) в \mathbb{R}^m ;
$\Gamma = \partial\Omega$	—	граница области Ω ;
mes	—	мера Лебега;
\emptyset	—	пустое множество;
\overline{E}	—	замыкание множества E ;
\rightarrow	—	обозначение отображения или сильной сходимости;
\rightharpoonup	—	обозначение слабой сходимости;
$\inf E$	—	точная нижняя грань числового множества E ;
$\sup E$	—	точная верхняя грань числового множества E ;
$\partial \cdot / \partial \cdot$	—	символ дифференцирования по соответствующей переменной;
$\partial \cdot / \partial \mathbf{n}$	—	производная по нормали;
$f _E$	—	ограничение (сужение) функции f на множество E ;
$f(E)$	—	образ множества E при отображении f ;
\circ	—	обозначение суперпозиции отображений;
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	—	скалярное произведение в гильбертовом пространстве X ;
(\cdot, \cdot)	—	скалярное произведение в \mathbb{R}^m ;
$\ \cdot\ _X$	—	норма в нормированном пространстве X ;
$\ \cdot\ $	—	норма в \mathbb{R}^m ;
X^*	—	пространство сопряженное к пространству X ;
A^*	—	оператор сопряженный к оператору A ;

- $C^m(\overline{\Omega})$ — банахово пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций, производные которых допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$ с нормой $\|y\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha y(x)|$;
- $L_p(\Omega)$ — банахово пространство всех измеримых и суммируемых по Лебегу на Ω со степенью p функций с нормой $\|y\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |y(x)|^p dx \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$;
- $L_p(\Gamma)$ — пространство суммируемых (по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на Γ) со степенью p функций с нормой $\|y\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |y(x)|^p d\Gamma \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$;
- $L_\infty(\Omega)$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|y\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{vgr} \max |y| = \inf_{E \subset \Omega} \left\{ \sup_{\Omega \setminus E} |y(x)| : m(E) = 0 \right\}$;
- $W_p^l(\Omega)$ — пространство Соболева всех функций из $L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные до l -го порядка включительно из пространства $L_p(\Omega)$ с нормой $\|y\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{k=0}^l \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^k y}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n} \right|^p dx \right)^{1/p}$, где $\sum_{(k)}$ обозначает суммирование всех возможных производных порядка k , $1 \leq p < \infty$, $l \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{L}(Z; Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из Z в Y ;
- ∇ — градиент скалярной функции или оператор Гамильтона;
- div — дивергенция векторного поля;
- Δ — оператор Лапласа;

- \forall — для любого;
- u** — все векторные величины обозначаются жирным шрифтом $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$;
- — конец доказательства или примера.

1. Прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии

В этой главе ставятся и исследуются прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии. Такие модели часто используются при исследовании различных гидродинамических и тепловых процессов, в частности, при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод, при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле (такие процессы исследуются в микроэлектронике).

Прямая граничная задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на границе Γ области изменения независимой пространственной переменной (области протекания процесса) Ω . В постановке обратной граничной задачи предполагается, что граница Γ разделена условно или по каким-то физическим соображениям на две части Γ_1 и Γ_2 , причем на части Γ_1 возможно измерение каких-либо необходимых параметров или характеристик процесса, а на границе Γ_2 такие измерения по каким-либо причинам невозможны. Обратная граничная задача состоит в нахождении некоторых подходящих граничных данных (например, следа от решения соответствующей краевой задачи) на части Γ_2 границы Γ по известным граничным данным и, возможно, по некоторым дополнительным граничным условиям на другой части границы Γ_1 .

Математическая постановка прямой задачи приводит к смешанной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка. Математическая постановка обратной задачи приводит к обобщенной задаче Коши для эллиптического уравнения второго порядка. Особенность прямой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных.

Граничные данные, вообще говоря, могут не являться гладкими и их нельзя продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать для переброски граничных данных в уравнение. В этих условиях прямая задача может не иметь ни классического, ни обобщенного решения. Это приводит к необходимости дальнейшего ослабления понятия решения, к исследованию разрешимости задачи в ослабленном смысле и исследованию соответствующих свойств такого решения. Особенность обратной задачи состоит в ее некорректности (неустойчивости) в соответствующих естественных пространствах граничных данных. Это приводит к необходимости разработки специальных устойчивых методов численного моделирования обратных задач.

В данной главе для прямой задачи вводится понятие слабого решения, доказываются его существование и единственность. Доказано, что прямая задача является корректно поставленной, установлены соответствующие априорные оценки на решение и непрерывная зависимость решения от граничных данных и правой части основного уравнения в соответствующих пространствах.

В этой главе доказано, что обратная задача оказывается некорректно поставленной, она неустойчива по граничным данным. Разработаны специальные регуляризирующие методы и алгоритмы решения обратной задачи. Подробно описаны вариационный метод, метод квазиобращения, модификации известных методов Ньютона–Канторовича, Ландвебера, Левенберга–Марквардта. Приводятся результаты численного моделирования решения обратной задачи с граничными режимами различной степени гладкости.

1.1. Постановка прямой граничной задачи

Охарактеризуем сначала содержательную сторону задачи. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов (режимов), рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды).

Математическая модель распределения температуры (концентрации рассматриваемого вещества среды) в области Ω представляет собой смешанную краевую задачу для уравнения реакции-конвекции-диффузии [4, 49–51, 67, 68]

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1.1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.1.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.1.3)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства \mathbb{R}^m ; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — заданный вектор скорости движения среды в точках \mathbf{x} области Ω , удовлетворяющий условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в области Ω (условие несжимаемости среды) и условию $\mathbf{u} = 0$ на границе Γ области Ω (условие прилипания среды на неподвижной границе Γ); $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — температура (концентрация рассматриваемого вещества) среды в области Ω ; $k = k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент теплопроводности (диффузии) среды в области Ω ; $q = q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент реакции в точках области Ω , характеризующий скорость образования или стока тепла (вещества) в результате химических превращений; $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданная объемная плотность образования или стока тепла (вещества) в области Ω ; $v = v(\mathbf{x})$ и $w = w(\mathbf{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_2 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω , с окружающей

средой (функция $v = v(\mathbf{x})$ характеризует заданное распределение температуры (концентрации вещества) на части Γ_1 границы Γ , функция $w = w(\mathbf{x})$ характеризует заданное распределение потока тепла (концентрации вещества) на части Γ_2 границы Γ , $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$); \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω .

Прямая граничная задача состоит в нахождении распределения температуры (концентрации вещества) T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3).

Эту задачу иногда кратко будем называть прямой задачей.

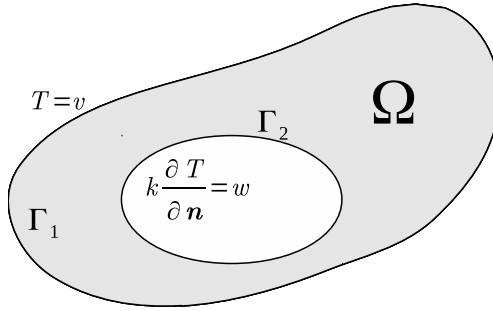


Рис. 1.1.1. Иллюстрация к постановке прямой задачи

Уточним постановку прямой задачи.

Будем считать, что Ω является ограниченной областью в \mathbb{R}^m (т. е. является ограниченным открытым связным множеством в \mathbb{R}^m) и обладает некоторой регулярностью. Пусть область Ω принадлежит одному из следующих классов областей. Первый класс \mathcal{O}_1 составляют гладкие области класса C^2 [50, с. 31], [97, с. 67], [59, с. 9]. Второй класс \mathcal{O}_2 составляют области, удовлетворяющие следующим трем условиям из [50]: условию 1 [50, с. 212, 30] (условие строгой липшицевости области; произвольная выпуклая область является строго липшицевой [50, с. 31]); условию 2 [50, с. 212] (условие равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадра-

тичной формы) и условию \mathfrak{R} [50, с. 222] (условие сильной разрешимости, т. е. разрешимости в пространстве Соболева $W_2^2(\Omega)$ задачи Пуассона с гладкими правыми частями и смешанными однородными граничными условиями, которые в данном случае соответствуют условиям (1.1.2)–(1.1.3)). Части Γ_1 и Γ_2 границы Γ считаются открытыми и регулярными на Γ [4, с. 28], причем $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, $\text{mes } \Gamma_2 > 0$; $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$ для $\Omega \in \mathcal{O}_1$. Указанные классы областей Ω достаточно широки для приложений. Если не оговорено специально, то считается, что область Ω принадлежит любому из указанных классов областей.

Для рассматриваемых областей и соответствующих функций, определенных на таких областях, будут использоваться понятие следа функции на границе Γ или ее частях Γ_1 , Γ_2 , а также различные теоремы о следах и теоремы вложения [49, 50, 59, 71, 97].

Далее в тексте будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(\Gamma)$, $L_p(\Gamma_1)$, $L_p(\Gamma_2)$, $p \geq 1$, пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$, $l \geq 1$, [49–51, 59, 71, 97], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_2)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, нормы в которых определяются обычным образом [50, с. 467], [51, с. 34]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [51, с. 41]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \right\},$$

$$G_1(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1 \right\},$$

$$G_2(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\},$$

в этих пространствах будут использоваться естественные скалярные произведения и нормы, как в подпространствах соответствующих пространств.

Пусть далее для определенности

$$k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad q \in L_\infty(\Omega),$$

$$f \in L_2(\Omega), \quad v \in L_2(\Gamma_1), \quad w \in L_2(\Gamma_2);$$

$$0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega},$$

$$\mu_1 = \text{const} \leq \mu_2 = \text{const};$$

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| \leq \mu_3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_3 = \text{const} \geq 0;$$

$$0 \leq q(\mathbf{x}) \leq \mu_4, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_4 = \text{const} \geq 0.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [49–51, 59, 71, 97].

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3), она может не иметь ни классического, ни обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3), следуя [53].

Умножим равенство (1.1.1) на пробную функцию $g \in G_1(\Omega)$, результат проинтегрируем по области Ω . Применим формулу интегрирования по частям [49, с. 75], [50, с. 70], перебросив часть производных с функции T на функцию g , получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx = \\ & = \int_{\Gamma} T(\mathbf{u}, \mathbf{n}) g \, d\Gamma - \int_{\Omega} T \left(g \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} q T g \, dx - \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T , g , \mathbf{u} и соленоидальность векторного поля \mathbf{u} , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) dx &= \\ &= - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) dx - \int_{\Omega} q T g dx - \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям ко второму слагаемому в левой части равенства (1.1.4), считая $g \in G_2(\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma - \int_{\Gamma_1} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} T \operatorname{div} (k \nabla g) dx &= \\ &= - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) dx - \int_{\Omega} q T g dx - \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T и g , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma - \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} T \operatorname{div} (k \nabla g) dx &= \\ &= - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) dx - \int_{\Omega} q T g dx - \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned}$$

Перепишем получившееся равенство в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) dx &= \\ &= \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma - \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Для функций $T \in L_2(\Omega)$ и $g \in G_2(\Omega)$ все элементы в равенстве (1.1.5) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Слабым решением краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) назовем функцию $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному равенству (1.1.5) для любой функции $g \in G_2(\Omega)$.

Таким образом, прямая граничная задача состоит в нахождении слабого решения краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3). Прямая задача будет использоваться при решении обратной задачи. В дальнейшем будет интересна и важна зависимость слабого решения от функций $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, $f \in L_2(\Omega)$.

Замечание 1.1.1. Из способа введения слабого решения краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) вытекает следующее утверждение. Если краевая задача (1.1.1)–(1.1.3) допускает классическое решение, то, с одной стороны, классическое решение этой краевой задачи, принадлежащее соответствующему пространству Соболева, является и ее сильным решением из пространства $W_2^2(\Omega)$, и ее обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$, и ее слабым решением из пространства $L_2(\Omega)$, с другой стороны, достаточно гладкое и принадлежащее соответствующему пространству Соболева, слабое решение краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) будет являться и ее обобщенным решением, и ее сильным решением, и ее классическим решением. Для обоснования сформулированного утверждения нужно произвести проделанные выше выкладки с интегралами сначала в "прямом", а затем в "обратном" порядках (см. аналогичные рассуждения в [49–51, 59]). О градации понятий решения краевой задачи см., например, [49–51, 53, 59].

Замечание 1.1.2. Наряду с поставленной прямой задачей, так же как и при изучении обратных задач и численном моделировании, могут рассматриваться варианты задач, в которых граница Γ разделена на большее конечное число частей, на каждой из которых могут задаваться граничные условия первого, второго или третьего рода. Такие варианты задач изу-

чаются совершенно аналогично и результаты в таких задачах также получаются аналогичными. В частности, при исследовании одного из вариантов обратной задачи ниже будет использоваться прямая задача

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Далее, при численном моделировании, в качестве Ω будет рассматриваться прямоугольная область

$$\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2), \quad \Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \bar{\Gamma}_4, \quad (1.1.6)$$

$$\Gamma_1 = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, x_2 = 0 \}, \quad (1.1.7)$$

$$\Gamma_2 = \{ (x_1, x_2) : x_1 = l_1, 0 < x_2 < l_2 \}, \quad (1.1.8)$$

$$\Gamma_3 = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, x_2 = l_2 \}, \quad (1.1.9)$$

$$\Gamma_4 = \{ (x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 < x_2 < l_2 \}. \quad (1.1.10)$$

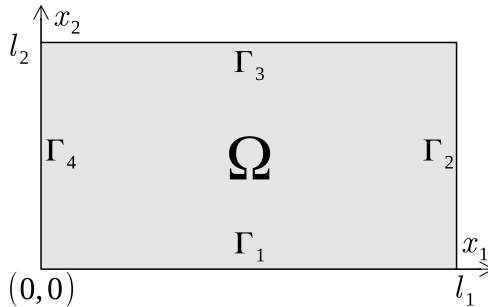


Рис. 1.1.2. Иллюстрация расчетной области

На границах Γ_2 и Γ_4 будут заданы неизменные условия теплоизоляции

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4.$$

Граница Γ_1 будет недоступна измерениям, на ней необходимо будет определить граничный режим

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Граница Γ_3 будет доступна измерениям, на ней будут заданы условия (измерения)

$$T = 0, \quad k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

1.2. Разрешимость и устойчивость прямой граничной задачи

Слабую разрешимость краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) установим методом транспонирования [53, 112]. Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.2.1. Пусть X — линейное подмножество банахова пространства Y , Z — гильбертово пространство, \mathcal{L} — взаимно однозначное линейное отображение X на Z такое, что \mathcal{L}^{-1} — непрерывно. Тогда для любого линейного непрерывного функционала $L \in Y^*$ существует единственный элемент $T \in Z$ такой, что

$$\langle T, \mathcal{L}g \rangle_Z = Lg \quad \forall g \in X,$$

при этом

$$\|T\|_Z = \|L \circ \mathcal{L}^{-1}\|_{Z^*} \leq \|L\|_{Y^*} \|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z;Y)}.$$

Доказательство. Рассмотрим линейный непрерывный функционал $L \circ \mathcal{L}^{-1} \in Z^*$. По теореме Рисса [34, с. 177] о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством существует единственный элемент $T \in Z$ такой, что

$$L \circ \mathcal{L}^{-1}(h) = \langle T, h \rangle_Z \quad \forall h \in Z.$$

Обозначим $\mathcal{L}^{-1}(h) = g \in X$, тогда $h = \mathcal{L}g$ и

$$\langle T, \mathcal{L}g \rangle_Z = Lg \quad \forall g \in X.$$

Равенство $\|T\|_Z = \|L \circ \mathcal{L}^{-1}\|_{Z^*}$ следует из теоремы Рисса, следующее неравенство $\|L \circ \mathcal{L}^{-1}\|_{Z^*} \leq \|L\|_{Y^*} \|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z;Y)}$ следует из определений суперпозиции (произведения) операторов и нормы оператора [34, с. 211]. ■

Равенство (1.1.5) можно записать в виде

$$\langle T, \mathcal{L}g \rangle_{L_2(\Omega)} = Lg,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}g &= \operatorname{div}(k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + qg, \\ Lg &= \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma - \int_{\Omega} f g dx. \end{aligned}$$

Чтобы воспользоваться леммой 1.2.1 для исследования вопроса о разрешимости прямой задачи следует положить $Z = L_2(\Omega)$, $Y = G_2(\Omega)$, X — должно быть множеством решений $g = g_\psi$ краевой задачи

$$\operatorname{div}(k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + qg = \psi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2.1)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.2.2)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.2.3)$$

полученным, когда функция ψ пробегает все множество $Z = L_2(\Omega)$, т. е.

$$X = \left\{ g = g_\psi : \psi \in Z \right\},$$

\mathcal{L} — должно быть отображением, которое ставит в соответствие элементу $g = g_\psi \in X$ элемент $\psi \in Z$, соответствующий данному решению $g = g_\psi$. Решение краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) следует понимать в сильном смысле, как элемент пространства $G_2(\Omega)$, удовлетворяющий уравнению (1.2.1) почти всюду на Ω , а равенствам (1.2.2) и (1.2.3) удовлетворяющий в смысле равенства соответствующих следов. Тогда из линейности краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) будет следовать, что операторы \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} будут являться линейными операторами из X в Z и из Z в X соответственно, X будет являться линейным подмножеством Y . Из определения оператора \mathcal{L} и условий, наложенных на его коэффициенты, следует также [50, гл. 1, § 2], что $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y) \subseteq Z$.

Чтобы оператор \mathcal{L} взаимно однозначно отображал X на Z и оператор \mathcal{L}^{-1} был непрерывным, достаточно чтобы краевая задача (1.2.1)–(1.2.3) для любой функции $\psi \in Z$ имела единственное решение $g = g_\psi \in X$ и чтобы это решение удовлетворяло априорной оценке $\|g\|_{G_2(\Omega)} \leq \varkappa \|\psi\|_{L_2(\Omega)}$.

Покажем, что так введенные множества, пространства и операторы определены корректно и удовлетворяют всем условиям леммы 1.2.1.

Лемма 1.2.2. *Функционал L линеен и непрерывен на $Y = G_2(\Omega)$, т. е.*

$$L \in Y^*,$$

при этом

$$\|L\|_{Y^*} \leq \nu_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + \nu_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где ν_1, ν_2 — некоторые неотрицательные числа, определяемые по известным параметрам задачи и не зависящие от оцениваемых и оценивающих величин, входящих в оценку.

Доказательство. Линейность функционала L следует из линейности интегралов по интегрантам и линейности операций дифференцирования. Непрерывность функционала L следует из теорем вложения [49, гл. 1, § 7, § 8], [50, гл. 2, § 2], [59, гл. 3] и следующих оценок

$$\begin{aligned} |Lg| &\leq \left| \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right| + \left| \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma \right| + \left| \int_{\Omega} f g dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \Gamma_1} |k(\mathbf{x})| \cdot \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \left\| \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} + \\ &+ \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \cdot \|g\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq k_2 \cdot \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Gamma_1)} + \\ &+ \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \cdot \gamma_1 \cdot \|g\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \\ &\leq k_2 \cdot \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \gamma_2 \cdot \|g\|_{W_2^2(\Omega)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \cdot \gamma_1 \cdot \|g\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|g\|_{W_2^2(\Omega)} \leq \\
& \leq \gamma \cdot \|g\|_{W_2^2(\Omega)} = \gamma \cdot \|g\|_Y,
\end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 — некоторые неотрицательные числа, определяемые из теорем вложения и не зависящие от оцениваемых величин,

$$\gamma = k_2 \cdot \gamma_2 \cdot \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + \gamma_1 \cdot \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из итоговой оценки $|Lg| \leq \gamma \cdot \|g\|_Y$ следует, что $L \in Y^*$.

Из полученной выше цепочки неравенств следует также оценка

$$\|L\|_{Y^*} \leq \gamma = \nu_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + \nu_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где $\nu_1 = k_2 \cdot \gamma_2$, $\nu_2 = \gamma_1$. ■

Осталось проверить, что линейный оператор \mathcal{L} осуществляет взаимно однозначное отображение линейного подмножества $X \subseteq Y = G_2(\Omega)$ на $Z = L_2(\Omega)$ и \mathcal{L}^{-1} непрерывен. Докажем сначала, что оператор \mathcal{L} осуществляет взаимно однозначное отображение X на Z . Это доказательство будет осуществляться в два этапа. На первом этапе будет доказано, что для любой функции $\psi \in Z$ краевая задача (1.2.1)–(1.2.3) имеет единственное обобщенное решение g_ψ из пространства $G_1(\Omega)$. На втором этапе будет доказано, что обобщенное решение g_ψ на самом деле будет являться элементом пространства $Y = G_2(\Omega)$ и будет являться единственным сильным решением краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3).

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) из пространства $G_1(\Omega)$, следуя [49, 50, 59]. Умножим равенство (1.2.1) на пробную функцию $\omega \in G_1(\Omega)$, результат проинтегрируем по области Ω , применим формулу интегрирования по частям [49, с. 75], [50, с. 70], перебросив часть производных с функции g на функцию ω , получим равенство

$$\int_{\Gamma_1} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \omega \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \omega \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla g, \nabla \omega) \, dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \omega \, d\Gamma - \int_{\Omega} g \left(\omega \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla \omega) \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} q g \omega \, dx = \int_{\Omega} \psi \omega \, dx.
\end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций g , ω , \mathbf{u} и соленоидальность векторного поля \mathbf{u} , получим равенство

$$- \int_{\Omega} k(\nabla g, \nabla \omega) \, dx - \int_{\Omega} g(\mathbf{u}, \nabla \omega) \, dx + \int_{\Omega} q g \omega \, dx = \int_{\Omega} \psi \omega \, dx.$$

Перепишем это равенство в виде

$$B(g, \omega) = F(\omega), \quad (1.2.4)$$

где

$$B(g, \omega) = \int_{\Omega} k(\nabla g, \nabla \omega) \, dx + \int_{\Omega} g(\mathbf{u}, \nabla \omega) \, dx - \int_{\Omega} q g \omega \, dx,$$

$$F(\omega) = - \int_{\Omega} \psi \omega \, dx.$$

Для функций $g \in G_1(\Omega)$ и $\omega \in G_1(\Omega)$ все элементы в равенстве (1.2.4) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Обобщенным решением краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) из пространства $G_1(\Omega)$ назовем всякую функцию $g \in G_1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству (1.2.4) для любой функции $\omega \in G_1(\Omega)$.

Замечание 1.2.1. Из способа введения обобщенного решения краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) следует, что, с одной стороны, классическое решение краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) является ее обобщенным решением, с другой стороны, достаточно гладкое обобщенное решение краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3)

будет являться классическим решением этой задачи, а достаточно гладкое и принадлежащее соответствующему пространству Соболева слабое решение будет являться обобщенным решением краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3). Для обоснования этого утверждения нужно произвести проделанные выше выкладки с интегралами в "обратном порядке" (см. аналогичные рассуждения в [49–51, 59]).

Лемма 1.2.3. *Краевая задача (1.2.1) – (1.2.3) имеет единственное обобщенное решение g из пространства $G_1(\Omega)$, при этом*

$$\|g\|_{G_1(\Omega)} \leq \nu \|\psi\|_{L_2(\Omega)},$$

где ν — некоторое неотрицательное число, определяемое по известным параметрам задачи и не зависящее от оцениваемых и оценивающих величин, входящих в оценку.

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся теоремой Лакса — Мильграма [64, с. 386], примененной к равенству (1.2.4). Правая часть в (1.2.4) является линейной непрерывной формой на $G_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= \left| \int_{\Omega} \psi \omega \, dx \right| \leq \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Левая часть в (1.2.4) определяет билинейную непрерывную коэрцитивную форму на $G_1(\Omega) \times G_1(\Omega)$. Проверим непрерывность билинейной формы

$$\begin{aligned} |B(g, \omega)| &= \left| \int_{\Omega} k(\nabla g, \nabla \omega) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} g(\mathbf{u}, \nabla \omega) \, dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} q g \omega \, dx \right| \leq \mu_2 \cdot \int_{\Omega} |(\nabla g, \nabla \omega)| \, dx + \\ &+ \|g\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|(\mathbf{u}, \nabla \omega)\|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \cdot \|g\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_2 \cdot \|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \cdot \|\nabla \omega\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Omega)} \cdot \mu_3 \cdot \|\nabla \omega\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \\
&\quad + \mu_4 \cdot \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \cdot \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \\
&\leq \left(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \right) \cdot \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \cdot \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Проверим коэрцитивность билинейной формы. Предварительно заметим, что

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{u}, \nabla g) dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{n}) g^2 d\Gamma = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
B(g, g) &= \int_{\Omega} k(\nabla g, \nabla g) dx + \int_{\Omega} q g^2 dx \geq \mu_1 \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx = \\
&= \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx + \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx \geq \\
&\geq \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla g, \nabla g) dx + \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \int_{\Omega} g^2 dx \geq \\
&\geq \min \left\{ \frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \right\} \|g\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = C \|g\|_{W_2^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

где

$$C = \min \left\{ \frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \right\},$$

c_{Ω} — константа из неравенства Пуанкаре — Фридрихса [49, с. 62, 116], [64, с. 195, 344], [70, с. 360, 361, 374]

$$\int_{\Omega} \omega^2 dx \leq c_{\Omega}^2 \int_{\Omega} (\nabla \omega, \nabla \omega) dx \quad \forall \omega \in G_1(\Omega).$$

Таким образом, в силу теоремы Лакса — Мильграма получаем существование единственного обобщенного решения g краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) из пространства $G_1(\Omega)$, при этом

снова же в силу теоремы Лакса — Мильграма при $\nu = C^{-1}$ имеем оценку

$$\|g\|_{G_1(\Omega)} = \|g\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \nu \|\psi\|_{L_2(\Omega)}.$$

■

Лемма 1.2.4. *Любое обобщенное решение g краевой задачи (1.2.1) — (1.2.3) из пространства $G_1(\Omega)$ является элементом пространства $G_2(\Omega)$ и является единственным сильным решением этой краевой задачи, при этом*

$$\|g\|_{G_2(\Omega)} \leqslant \varkappa \|\psi\|_{L_2(\Omega)},$$

где \varkappa — некоторое неотрицательное число, определяемое по известным параметрам задачи и не зависящее от оцениваемых и оценивающих величин, входящих в оценку.

Доказательство. Для класса областей \mathcal{O}_1 и некоторых других классов областей типа "криволинейных цилиндров", утверждение леммы доказано в [117], для класса областей \mathcal{O}_2 оно доказывается аналогично [49, 50].

■

Лемма 1.2.5. *Оператор \mathcal{L} осуществляет взаимно однозначное линейное отображение X на Z . При этом оператор \mathcal{L}^{-1} непрерывен и*

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z;Y)} \leqslant \varkappa.$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 1.2.4 и рассуждений, приведенных перед леммой 1.2.2.

■

Для прямой задачи (1.1.1)–(1.1.3) справедлива следующая теорема о разрешимости.

Теорема 1.2.1. *Для любых $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача (1.1.1) — (1.1.3) имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\begin{aligned} \|T\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \|L\|_{Y^*} \|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z;Y)} \leqslant \\ &\leqslant C_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + C_3 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$C_1 = \kappa \nu_1, \quad C_2 = \kappa \nu_1, \quad C_3 = \kappa.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 1.2.1 – 1.2.5. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1.2.2. *Для любых $v \in L_2(\Gamma_1)$, $\xi \in L_2(\Gamma_2)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача*

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2.5)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.2.6)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.2.7)$$

имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке

$$\|T\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1^* \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_2^* \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)} + C_3^* \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где C_1^ , C_2^* , C_3^* — некоторые неотрицательные числа, определяемые по известным параметрам краевой задачи и не зависящие от оценивающих и оцениваемых величин, входящих в оценку.*

1.3. Постановка обратной граничной задачи

Охарактеризуем с содержательной точки зрения обратную граничную задачу, соответствующую некоторой прямой граничной задаче. Как и прежде, в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов (режимов), рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды).

Предположим, что граница Γ области Ω условно разделена на две части Γ_1 и Γ_2 . Считается, что на части Γ_1 границы возможно прямое измерение необходимых параметров среды (например, температуры или концентрации вещества, потока тепла или потока вещества). На части Γ_2 границы прямое измерение необходимых параметров среды невозможно, но знание этих параметров крайне необходимо.

Обратная граничная задача состоит в нахождении необходимых параметров сплошной среды на части Γ_2 границы Γ по всей совокупности граничных данных, имеющихся на части Γ_1 границы Γ , при учете соответствующей модели, описывающей состояние среды в области Ω .

Для определенности будем считать, что на части Γ_1 границы задаются и известны температура (концентрация вещества) $T = v$ и тепловой поток (поток вещества) $k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi$. Модель распределения температуры (концентрации вещества) в области Ω описывается стационарным уравнением реакции-конвекции-диффузии (1.1.1). Искомыми величинами могут быть температура (концентрация вещества) T на части Γ_2 границы, или тепловой поток (поток вещества) $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на Γ_2 , или одновременно одно и другое, или какая-нибудь величина, вычисляемая по T и $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на Γ_2 . Будем считать, для определенности, что искомой величиной является температура (концентрация вещества) T на части Γ_2 границы Γ . Варианты задачи с другими искомыми величинами могут изучаться

совершенно аналогично. Это связано с тем, что обратные граничные задачи могут решаться в два этапа. На первом этапе (одинаковом для всех вариантов искомых величин) решается краевая задача (обобщенная задача Коши)

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.3.1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.3.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (1.3.3)$$

На втором этапе по найденному решению $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, находятся или след $T|_{\Gamma_2}$, или след $k \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2}$, или одновременно одно и другое, или какая-нибудь величина, вычисляемая по $T|_{\Gamma_2}$ и $k \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2}$. Для определенности, далее будем рассматривать следующий вариант обратной граничной задачи.

Обратная граничная задача состоит в нахождении температуры (концентрации вещества) $T|_{\Gamma_2}$ на части Γ_2 границы Γ в результате решения краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3).

Эту задачу кратко будем называть обратной задачей.

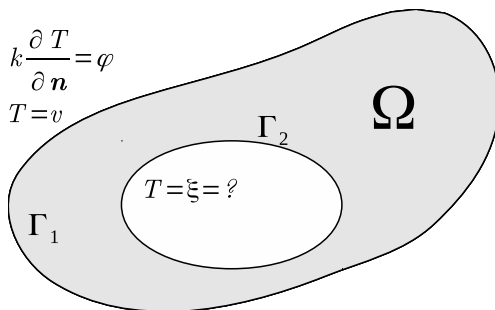


Рис. 1.3.1. Иллюстрация к постановке обратной задачи

Уточним постановку обратной задачи.

Будем считать, что все величины и параметры в обратной задаче (в краевой задаче (1.3.1)–(1.3.3)) удовлетворяют тем же условиям, каким удовлетворяют эти величины и параметры в прямой задаче и $\varphi \in L_2(\Gamma_1)$.

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3), она может не иметь классического и обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3), следуя [53] (см. также аналогичные рассуждения в § 1.1).

Введем в рассмотрение гильбертовы пространства

$$G_3(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\},$$

$$G_4(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_2, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\},$$

в этих пространствах будут использоваться естественные скалярные произведения и нормы, как в подпространствах соответствующих пространств.

Умножим равенство (1.3.1) на пробную функцию $g \in G_3(\Omega)$ и результат проинтегрируем по области Ω . Применим формулу интегрирования по частям [49, с. 75], [50, с. 70] и перебросим часть производных с функции T на функцию g , получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx = \\ & = \int_{\Gamma} T(\mathbf{u}, \mathbf{n}) g \, d\Gamma - \int_{\Omega} T \left(g \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} q T g \, dx - \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T , g , \mathbf{u} и соленоидальность векторного поля \mathbf{u} , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \varphi g \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx = \tag{1.3.4} \\ & = - \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla g) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx - \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям ко второму слагаемому в левой части равенства (1.1.4), считая $g \in G_4(\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \varphi g \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} T k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} T \operatorname{div} (k \nabla g) \, dx = \\ = - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx - \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций T и g , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \varphi g \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} T \operatorname{div} (k \nabla g) \, dx = \\ = - \int_{\Omega} T (\mathbf{u}, \nabla g) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx - \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Перепишем получившееся равенство в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) \, dx = \quad (1.3.5) \\ = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi g \, d\Gamma - \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Для функций $T \in L_2(\Omega)$ и $g \in G_4(\Omega)$ все элементы в равенстве (1.3.5) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Слабым решением краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3) назовем всякую функцию $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному равенству (1.3.5) для любой функции $g \in G_4(\Omega)$.

Замечание 1.3.1. Из способа введения слабого решения краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3) вытекает следующее утверждение. Если краевая задача (1.3.1)–(1.3.3) допускает классическое

решение, то, с одной стороны, классическое решение этой краевой задачи является и ее сильным решением из пространства $W_2^2(\Omega)$, и ее обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$, и ее слабым решением из пространства $L_2(\Omega)$, с другой стороны, достаточно гладкое слабое решение краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3) будет являться и ее обобщенным решением, и ее сильным решением, и ее классическим решением. Для обоснования сформулированного утверждения нужно произвести проделанные выше выкладки с интегралами сначала в "прямом", а затем в "обратном" порядках (см. аналогичные рассуждения в [49–51, 59]).

Таким образом, в качестве обратной граничной задачи будет рассматриваться задача о нахождении следа $T|_{\Gamma_2}$ от слабого решения краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3).

Если ввести в рассмотрение аффинный оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1), \quad (1.3.6)$$

где T — решение краевой задачи

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.3.7)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.3.8)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.3.9)$$

то обратная задача сводится к решению операторного уравнения

$$A\xi = \varphi. \quad (1.3.10)$$

При $f = 0$ оператор A будет линейным.

Отметим предварительно следующие моменты. Во-первых, обратная граничная задача поставлена пока формально, поскольку еще ничего не сказано о разрешимости краевой задачи (1.3.1)–(1.3.3) и о существовании следа $T|_{\Gamma_2}$. Во-вторых, для любых функций $v \in L_2(\Gamma_1)$ и $\xi \in L_2(\Gamma_2)$ по теореме 1.2.2

краевая задача (1.3.7)–(1.3.9) имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, которое может не иметь подходящего следа $k \partial T / \partial \mathbf{n} |_{\Gamma_1}$.

Сначала отметим, что, вообще говоря, краевая задача (1.3.1)–(1.3.3) может не иметь слабого решения при любых $v \in L_2(\Gamma_1)$ и $\varphi \in L_2(\Gamma_1)$. Действительно, рассмотрим следующий конкретный пример.

Пример 1.3.1. Рассмотрим задачу

$$\Delta T = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad (1.3.11)$$

$$T(x_1, 0) = 0, \quad T(x_1, 1) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad (1.3.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}(0, x_2) = 0, \quad T(0, x_2) = v(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \quad (1.3.13)$$

Пусть

$$v(x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \sqrt{2} \sin(\pi i x_2), \quad v_i = \left(\frac{1}{\ln(1+i)} \right)^{1/2} \exp(-\pi i).$$

Используя признак Вейерштрасса [61, с. 495], [94, с. 237], можно показать, что сам ряд для v и ряды, полученные его почленным дифференцированием сколько угодно раз, сходятся равномерно по $x_2 \in [0, 1]$, и поэтому $v \in C_0^\infty[0, 1]$, и тем более $v \in L_2[0, 1]$.

Легко проверить, что задача (1.3.11)–(1.3.13) может иметь не более одного решения (слабого, обобщенного, сильного или классического). Предположим, что эта задача имеет (одно) слабое решение $T \in L_2(\Omega)$. Используя метод разделения переменных, это решение можно представить в виде формального ряда Фурье

$$T(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \operatorname{ch}(\pi i x_1) \sqrt{2} \sin(\pi i x_2). \quad (1.3.14)$$

Частичные суммы этого ряда являются классическими решениями задачи (1.3.11)–(1.3.13), когда на границе во втором

равенстве (1.3.13) вместо функции v стоит соответствующая частичных суммах ряда Фурье, представляющего функцию v .

Используя признак Абеля-Дирихле [61, с. 497–499], [94, с. 231–233], можно показать, что ряд (1.3.14) сходится к своей сумме в любой точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Используя этот же признак, можно также показать, что ряд (1.3.14) сходится равномерно по $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Pi_\varepsilon = [0, 1] \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$, и поэтому функция $T \in C(\Pi_\varepsilon)$.

Используя признак Вейерштрасса [61, с. 495], [94, с. 237], можно показать, что сам ряд (1.3.14) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по переменным x_1 и x_2 сколько угодно раз, сходятся равномерно по $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_\varepsilon = [0, \varepsilon] \times [0, 1]$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$, и поэтому функция $T \in C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon)$. Отсюда следует, что слабое решение (1.3.14) является классическим решением задачи (1.3.11)–(1.3.13) в области $\bar{\Omega}_\varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$.

Учитывая, что $T \in L_2(\Omega)$ и равенство Парсеваля [34, с. 142]

$$\|T(x_1, \cdot)\|_{L_2[0,1]}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(v_i \operatorname{ch}(\pi i x_1) \right)^2$$

по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [34, с. 284], получаем

$$\begin{aligned} \infty &> \|T\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \|T(x_1, \cdot)\|_{L_2[0,1]}^2 dx_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(v_i \operatorname{ch}(\pi i x_1) \right)^2 dx_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left(v_i \operatorname{ch}(\pi i x_1) \right)^2 dx_1 \geqslant \\ &\geqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\pi i \ln(1+i)} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Из полученного противоречивого условия $\infty > \|T\|_{L_2(\Omega)}^2 = \infty$ следует, что в рассматриваемом примере слабого решения задачи (1.3.11)–(1.3.13) не существует. ■

Утверждения о единственности решения задачи (1.3.1)–(1.3.3) известны лишь для некоторых частных случаев. Приведем одно из таких утверждений [26, с. 254].

Утверждение 1.3.1. *Решение задача (1.3.11) – (1.3.13) единственно в классе функций $T \in C^4(\overline{\Omega})$, представимых в виде ряда Фурье*

$$T(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(x_1) \sin(\pi i x_2)$$

с коэффициентами Фурье $T_i \in C^4[0, 1]$.

Замечание 1.3.2. Вернемся теперь к постановке задачи и вопросу о следах. Хорошо известно [49–51, 59, 71, 97], что функция $T \in L_2(\Omega)$, вообще говоря, может не иметь следов $T|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $T|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$ и тем более следов $\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$. Чтобы сделать постановки обратных граничных задач корректными, можно было бы поступить следующим образом. Используемые здесь следы принадлежат более широким пространствам (пространствам функционалов, пространствам Соболева с отрицательными показателями [4, 54, 97]) и поэтому можно было бы поставить обратные граничные задачи с использованием этих пространств. Однако практическая и компьютерная реализация методов решения обратных задач стала бы тогда чрезвычайно трудной и громоздкой. Поэтому будем придерживаться в данной работе другого подхода. Будем считать, как это иногда делается [26, 52, 68], что параметры краевых задач принадлежат некоторым подпространствам используемых пространств, при привлечении которых соответствующие следы существуют в пространствах L_2 , постановки задач корректны, разрабатываемые методы и алгоритмы осуществимы.

1.4. Некорректность обратной граничной задачи

Напомним несколько простых примеров (типа примеров Адамара), показывающих, что рассматриваемая обратная граничная задача является, вообще говоря, некорректной (неустойчивой).

Пример 1.4.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}\Delta T &= 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ T(x_1, 0) &= 0, \quad T(x_1, 1) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1}(0, x_2) &= 0, \quad T(0, x_2) = v(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1.\end{aligned}$$

Пусть

$$v(x_2) = v_i(x_2) = \frac{1}{i} \sin(\pi i x_2).$$

Тогда

$$T(x_1, x_2) = T_i(x_1, x_2) = \frac{1}{i} \operatorname{ch}(\pi i x_1) \sin(\pi i x_2).$$

При этом

$$\begin{aligned}\|v_i\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2i^2} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \\ \|T_i\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2i^2} \left(\frac{1}{2\pi i} \operatorname{sh}(\pi i) \operatorname{ch}(\pi i) + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty, \\ \|T_i(1, \cdot)\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} \operatorname{ch}(\pi i) \right)^2 \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

■

Пример 1.4.2. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}\Delta T &= 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ T(x_1, 0) &= 0, \quad T(x_1, 1) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1}(0, x_2) &= \varphi(x_2), \quad T(0, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 1.\end{aligned}$$

Пусть

$$\varphi(x_2) = \varphi_i(x_2) = \frac{1}{i} \sin(\pi i x_2).$$

Тогда

$$T(x_1, x_2) = T_i(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi i^2} \operatorname{sh}(\pi i x_1) \sin(\pi i x_2).$$

При этом

$$\begin{aligned} \|\varphi_i\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2i^2} \rightarrow 0, \\ \|T_i\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi i^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2\pi i} \operatorname{sh}(\pi i) \operatorname{ch}(\pi i) - \frac{1}{2} \right) \rightarrow \infty, \\ \|T_i(1, \cdot)\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi i^2} \operatorname{sh}(\pi i) \right)^2 \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Пример 1.4.3. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta T &= 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ \frac{\partial T}{\partial x_2}(x_1, 0) &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2}(x_1, 1) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1}(0, x_2) &= 0, \quad T(0, x_2) = v(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$v(x_2) = v_i(x_2) = \frac{1}{i} \cos(\pi i x_2).$$

Тогда

$$T(x_1, x_2) = T_i(x_1, x_2) = \frac{1}{i} \operatorname{ch}(\pi i x_1) \cos(\pi i x_2).$$

При этом

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2i^2} \rightarrow 0, \\ \|T_i\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2i^2} \left(\frac{1}{2\pi i} \operatorname{sh}(\pi i) \operatorname{ch}(\pi i) + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \infty, \\ \|T_i(1, \cdot)\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} \operatorname{ch}(\pi i) \right)^2 \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Пример 1.4.4. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}\Delta T &= 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ \frac{\partial T}{\partial x_2}(x_1, 0) &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2}(x_1, 1) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1}(0, x_2) &= \varphi(x_2), \quad T(0, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 1.\end{aligned}$$

Пусть

$$\varphi(x_2) = \varphi_i(x_2) = \frac{1}{i} \cos(\pi i x_2).$$

Тогда

$$T(x_1, x_2) = T_i(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi i^2} \operatorname{sh}(\pi i x_1) \cos(\pi i x_2).$$

При этом

$$\begin{aligned}\|\varphi_i\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2i^2} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \\ \|T_i\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi i^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2\pi i} \operatorname{sh}(\pi i) \operatorname{ch}(\pi i) - \frac{1}{2} \right) \rightarrow \infty, \\ &\quad i \rightarrow \infty, \\ \|T_i(1, \cdot)\|_{L_2[0,1]}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi i^2} \operatorname{sh}(\pi i) \right)^2 \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

■

Покажем некоторые варианты неустойчивости обратной граничной задачи в общем случае. Предварительно докажем, что оператор решения прямой задачи является вполне непрерывным [34, с. 222, 230]. Отсюда следует, что такой оператор не может иметь непрерывного (ограниченного [34, с. 209]) обратного оператора [34, с. 222, 228].

Теорема 1.4.1. *Если $v_i \rightharpoonup v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $w_i \rightharpoonup w_0$ слабо в $L_2(\Gamma_2)$, $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то $T_i = T[v_i, w_i, f_i] \rightarrow$*

$T_0 = T[v_0, w_0, f_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$, где $T = T[v, w, f]$ — слабое решение краевой задачи (1.1.1) — (1.1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы произвольные последовательности $\{v_i\} \subset L_2(\Gamma_1)$, $\{w_i\} \subset L_2(\Gamma_1)$, $\{f_i\} \subset L_2(\Omega)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Слабо сходящиеся в нормированных пространствах последовательности ограничены [34, с. 183]. Тогда из результатов теоремы 1.2.1 следует ограниченность последовательности слабых решений $\{T_i\}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. В гильбертовом пространстве из ограниченной последовательности всегда можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность [34, с. 230], [55, с. 167]. Пусть $\{T_{i_j}\}$ есть произвольная слабо в $L_2(\Omega)$ сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{T_i\}$. Пусть она сходится к некоторому элементу $T_* \in L_2(\Omega)$. Пределный переход при $j \rightarrow \infty$ в тождестве (1.1.5), записанном для решения T_{i_j} , позволяет заключить, что $T_* = T_0 = T[v_0, w_0, f_0]$. В силу единственности решения заключаем, что вся последовательность $\{T_i\}$ слабо в $L_2(\Omega)$ сходится к элементу $T_0 = T[v_0, w_0, f_0]$. Рассмотрим краевую задачу (1.2.1)–(1.2.3) с $\psi = T_i$. По лемме 1.2.4 эта краевая задача имеет единственное сильное решение $g = g_i \in G_2(\Omega)$, причем последовательность этих решений $\{g_i\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $G_2(\Omega)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что последовательность $\{g_i\}$ слабо в $G_2(\Omega)$ сходится к некоторому элементу $g_0 \in G_2(\Omega)$, являющемуся решением краевой задачи (1.2.1)–(1.2.3) при $\psi = T_0$. Запишем тождество (1.1.5) для решения T_i при $g = g_i$

$$\int_{\Omega} T_i^2 dx = \int_{\Gamma_1} v_i k \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w_i g_i d\Gamma - \int_{\Omega} f_i g_i dx. \quad (1.4.1)$$

Из компактности оператора вложения [49–51, 59, 71, 97] следует, что

$$\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} \rightarrow \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} \text{ сильно в } L_2(\Gamma_1),$$

$g_i \rightarrow g_0$ сильно в $L_2(\Gamma_2)$, $g_i \rightarrow g_0$ сильно в $L_2(\Omega)$.

Выполнив предельный переход в равенстве (1.4.1), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_i^2 dx &= \int_{\Gamma_1} v_i k \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w_i g_i d\Gamma - \int_{\Omega} f_i g_i dx \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Gamma_1} v_0 k \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w_0 g_0 d\Gamma - \int_{\Omega} f_0 g_0 dx = \int_{\Omega} T_0^2 dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|T_i\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow \|T_0\|_{L_2(\Omega)}.$$

В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость

$$T_i \rightarrow T_0 \text{ сильно в } L_2(\Omega).$$

■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1.4.2. Если $v_i \rightharpoonup v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $\xi_i \rightharpoonup \xi_0$ слабо в $L_2(\Gamma_2)$, $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то $T_i = T[v_i, \xi_i, f_i] \rightarrow T_0 = T[v_0, \xi_0, f_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$, где $T = T[v, \xi, f]$ — слабое решение краевой задачи (1.2.5) — (1.2.7).

Замечание 1.4.1. Допустим, что Ξ и Θ — некоторые подпространства пространств $L_2(\Gamma_2)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно, \mathcal{T} — оператор решения $\mathcal{T} : \Xi \ni \xi \rightarrow \mathcal{T}\xi = T[\xi] \in \Theta$, где $T[\xi]$ — решение краевой задачи (1.3.7)–(1.3.9), \mathcal{Y} — оператор конормального дифференцирования $\mathcal{Y} : \Theta \ni T \rightarrow \mathcal{Y}T = k \partial T / \partial \mathbf{n} |_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$. Если один из операторов \mathcal{T} и \mathcal{Y} вполне непрерывен, а другой ограничен, то их произведение (суперпозиция) есть вполне непрерывный оператор [34, с. 227]) и, следовательно, не имеет ограниченного обратного оператора.

Замечание 1.4.2. Далее, при описании методов и алгоритмов решения обратных задач, некоторые промежуточные выкладки будут выполняться формально, однако они будут вполне законными, если исходные данные задачи считать принадлежащими соответствующим подходящим подпространствам.

1.5. Вариационный метод решения обратной задачи

Нахождение неизвестного теплового режима ξ на Γ_2 в обратной задаче (1.3.1)–(1.3.3) можно свести к соответствующей вариационной задаче следующим образом. Рассмотрим прямую задачу

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5.1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.5.2)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (1.5.3)$$

Пусть наблюдаемый тепловой режим $\varphi = k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_1 в обратной задаче (1.3.1)–(1.3.3) соответствует некоторому заранее неизвестному тепловому режиму $T = \xi^*$ на границе Γ_2 . Пусть T^* — решение прямой задачи (1.5.1)–(1.5.3) при $\xi = \xi^*$, тогда $k \partial T^* / \partial \mathbf{n} = \varphi$ на Γ_1 . Пусть $L_2(\Gamma_2) \supseteq V$ — некоторое множество допустимых граничных режимов на границе Γ_2 и известно, что $\xi^* \in V$.

Для граничных режимов $\xi \in V$ рассмотрим функционал качества

$$J_0(\xi) = \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma,$$

где T_ξ — решение прямой задачи (1.5.1)–(1.5.3). Функционал качества должен принимать нулевое значение при $\xi = \xi^*$ ($J_0(\xi^*) = 0$). Искомый граничный режим ξ^* является минимизирующим элементом в следующей вариационной (экстремальной) задаче:

$$J_0(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V,$$

то есть

$$\xi^* \in \operatorname{argmin} \left\{ J_0(\xi) : \xi \in V \right\}.$$

Для придания этой задаче минимизации некоторого запаса устойчивости введем в функционал J_0 стабилизирующую добавку $\alpha \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)}^2$ и рассмотрим следующий функционал:

$$J(\xi) = J_0(\xi) + \alpha \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)}^2, \quad (1.5.4)$$

где α — малый положительный параметр.

Таким образом, от решения обратной задачи (1.3.1)–(1.3.3) переходим к решению вариационной (экстремальной) задачи

$$J(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V.$$

Для минимизации функционала J воспользуемся методом сопряженных градиентов [15, с. 299], [99, 114]. Сначала найдем градиент функционала ∇J . Зафиксируем элемент $\xi \in V$ и дадим ему приращение $h \in W_2^2(\Gamma_2)$. Пусть $T_{\xi+h}$ — решение прямой задачи (1.5.1)–(1.5.3) с граничным условием $T = \xi + h$ на Γ_2 , а T_ξ — решение прямой задачи (1.5.1)–(1.5.3) с граничным условием $T = \xi$ на Γ_2 . Введем разность $T = T_{\xi+h} - T_\xi$, она удовлетворяет краевой задаче

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$T = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Функция T для любой функции $g \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) dx = \\ = \int_{\Gamma_2} h k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g d\Gamma. \end{aligned}$$

Пусть функция $g = g_\xi$ удовлетворяет краевой задаче

$$\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$g = 2 \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Далее эту задачу будем называть сопряженной к задаче (1.5.1)–(1.5.3).

Если $g = g_\xi$ — решение сопряженной задачи, то

$$\int_{\Gamma_2} h k \frac{\partial g_\xi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = 2 \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) d\Gamma.$$

Найдем приращение функционала J в точке $\xi \in V$:

$$\begin{aligned} J(\xi + h) - J(\xi) &= \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_{\xi+h}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma + \alpha \left\| \xi + h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 - \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma - \alpha \left\| \xi \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 = \\ &= 2 \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) d\Gamma + \left\| k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Gamma_2} \xi h d\Gamma + \alpha \left\| h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 = \\ &= \int_{\Gamma_2} h \left(k \frac{\partial g_\xi}{\partial \mathbf{n}} + 2\alpha \xi \right) d\Gamma + \left\| k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \alpha \left\| h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2. \end{aligned}$$

Из полученной цепочки равенств получаем

$$J(\xi + h) - J(\xi) = \int_{\Gamma_2} h \left(k \frac{\partial g_\xi}{\partial \mathbf{n}} + 2\alpha \xi \right) d\Gamma + o \left(\left\| h \right\|_{W_2^2(\Gamma_2)} \right),$$

поскольку [49, 50] (см. также лемму 1.2.3)

$$\left\| k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 + \alpha \left\| h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 = o \left(\left\| h \right\|_{W_2^2(\Gamma_2)} \right),$$

значит (L_2, W_2^2) -градиент функционала [9, 33] определяется равенством

$$\nabla J = \nabla J(\xi; \alpha) = \left(k \frac{\partial g_\xi}{\partial \mathbf{n}} + 2 \alpha \xi \right) \Big|_{\Gamma_2}.$$

Для нахождения точек минимума функционала (1.5.4) будет использоваться метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса [99, 114]:

$$\begin{aligned} \xi_{i+1} &= \xi_i + \beta_i d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ d_i &= \begin{cases} -\nabla J(\xi_i; \alpha_i), & i = 0, \\ -\nabla J(\xi_i; \alpha_i) + \gamma_i d_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \\ \gamma_i &= \frac{\|\nabla J(\xi_i; \alpha_i)\|_{L_2(\Gamma_2)}^2}{\|\nabla J(\xi_{i-1}; \alpha_{i-1})\|_{L_2(\Gamma_2)}^2}, \quad i = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр $\alpha = \alpha_i$, содержащийся в выражении $\nabla J(\xi_i; \alpha_i)$, необходимом для вычисления $d_i = d_i(\alpha)$. Для этого решается одномерная задача минимизации:

$$J(\xi_i + d_i(\alpha)) \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Шаг спуска β_i (демпфирующий множитель) определялся в результате решения задачи одномерной минимизации: $J(\xi_i + \beta d_i) \rightarrow \min : \beta > 0$.

В данном случае при решении задач одномерной минимизации достаточно хорошо зарекомендовал себя так называемый "неточный" поиск точки минимума, удовлетворяющий строгим условиям Вольфе [33, 100]

$$\begin{aligned} J(\xi_i + \beta d_i) &\leq J(\xi_i) + \sigma_1 \beta \langle \nabla J(\xi_i), d_i \rangle, \\ |\langle \nabla J(\xi_i + \beta d_i), d_i \rangle| &\leq \sigma_2 |\langle \nabla J(\xi_i), d_i \rangle|, \\ 0 &< \sigma_1 < \sigma_2 < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

с применением алгоритма из [33, 113].

Пусть далее при численном моделировании Ω является прямоугольной областью (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача вида

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5.5)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.5.6)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (1.5.7)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (1.5.8)$$

Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдаются) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Тогда функционал (1.5.4) запишется в виде

$$J(\xi) = \int_0^{l_1} \left(k \frac{\partial T_\xi(x_1, l_2)}{\partial x_2} - \varphi(x_1) \right)^2 dx_1 + \alpha \int_0^{l_1} \xi(x_1)^2 dx_1. \quad (1.5.9)$$

Сопряженная задача, необходимая для нахождения градиента функционала (1.5.9), примет вид

$$\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + qg = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5.10)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.5.11)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (1.5.12)$$

$$g = 2 \left(k \frac{\partial T_\xi(x_1, l_2)}{\partial x_2} - \varphi \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (1.5.13)$$

Опишем кратко алгоритм численного решения вариационной задачи. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Заданную или найденную на предыдущем шаге функцию $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и находим решение T_ξ этой краевой задачи.

2. Подставляем T_ξ в сопряженную задачу (1.5.10)–(1.5.13) и находим ее решение $g = g_\xi$.

3. По заданным $\xi = \xi_i$ и $g = g_{\xi_i}$ находим градиент

$$\nabla J(\xi_i; \alpha) = -k \frac{\partial g_{\xi_i}(x_1, 0)}{\partial x_2} + 2\alpha \xi_i(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1.$$

4. Выполняем очередную итерацию метода сопряженных градиентов и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$J(\xi_i) < \varepsilon_0,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

Обратимся теперь к моделированию конкретных примеров.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались следующие параметры:

$$l_1 = l_2 = 1.0, \quad k = 1.0, \quad q = 0.1, \quad f = 0.0, \quad (1.5.14)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2),$$

$$u_1 = -2x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1)x_2^2(1 - x_2)^2,$$

$$u_2 = 2x_2(1 - x_2)(1 - 2x_2)x_1^2(1 - x_1)^2.$$

В области Ω для расчетов прямой (1.5.5)–(1.5.8) и сопряженной (1.5.10)–(1.5.13) задач задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l, h_1, j, h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \},$$

где $h_1 = 1/N_1$, $h_2 = 1/N_2$.

Сеточный оператор Лапласа определяется обычным образом

$$\Delta y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2}.$$

Здесь и ниже используются общепринятые обозначения из теории разностных схем [67].

Для унификации записи конвективных слагаемых в разностной схеме использовался специальный дифференциальный оператор с центрально-разностной аппроксимацией

$$V(\mathbf{u})T = V_1(u_1)T + V_2(u_2)T,$$

$$V_\alpha(u_\alpha)T = \frac{1}{2} \left((u_\alpha T)_{x_\alpha}^\circ + u_\alpha T_{x_\alpha}^\circ \right).$$

Прямая задача (1.5.5)–(1.5.8) решалась методом установления. Для численного решения уравнения (1.5.5) использовалась монотонная устойчивая неявная схема регуляризованных центральных разностей [68, §§ 9.1.4, 9.2.1, 13.4.3]. Разностная схема для (1.5.5)–(1.5.8) может быть записана в виде

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\tau} + V(\mathbf{u})T_{i+1} + \Lambda T_{i+1} - qT_{i+1} = f.$$

Производная на границе Γ_4 аппроксимируется со вторым порядком точности обычным образом [68, с. 119]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\frac{h_1}{2}, x_2)}{\partial x_1} &= \frac{T(h_1, x_2) - T(0, x_2)}{h_1} + o(h_1^2), \\ \frac{\partial T(\frac{h_1}{2}, x_2)}{\partial x_1} &= \frac{\partial T(0, x_2)}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 T(0, x_2)}{\partial^2 x_1} + o(h_1^2), \\ \frac{\partial^2 T(0, x_2)}{\partial^2 x_1} &= (\mathbf{u}(0, x_2), \nabla T(0, x_2)) - q(0, x_2) T(0, x_2) - \\ &\quad - f(0, x_2) - \frac{\partial^2 T(0, x_2)}{\partial^2 x_2}. \end{aligned}$$

С учетом условия (1.5.7) и условия $\mathbf{u} = 0$ на Γ , на границе Γ_4 получаем

$$\frac{1}{h_2^2} T_{0,j+1} - \left(q_{0,j} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) T_{0,j} + \frac{1}{h_2^2} T_{0,j-1} +$$

$$+\frac{2}{h_1^2} T_{1,j} = -f_{0,j}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Аналогичную аппроксимацию производной $\partial T / \partial x_1$ выполняем в точке $(1 - 0.5 h_1, x_2)$, и на границе Γ_2 получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2^2} T_{N_1,j+1} + \left(q_{N_1,j} - \frac{2}{h_1^2} - \frac{2}{h_2^2} \right) T_{N_1,j} + \frac{1}{h_2^2} T_{N_1,j-1} + \\ + \frac{2}{h_1^2} T_{N_1-1,j} = -f_{N_1,j}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{aligned}$$

Аналогично решалась сопряженная задача (1.5.10)–(1.5.13).

Моделировались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов различной степени гладкости.

Пример 1: гладкий режим

$$\xi^{(1)}(x_1) = \cos(2\pi x_1). \quad (1.5.15)$$

Пример 2: непрерывный кусочно-гладкий режим

$$\xi^{(2)}(x_1) = |\cos(\pi x_1)|. \quad (1.5.16)$$

Пример 3: разрывный режим

$$\xi^{(3)}(x_1) = \begin{cases} 0.5, & x_1 \in (0; 0.1), \\ x_1 + 0.4, & x_1 \in (0.1; 0.5), \\ 0.9 - x_1, & x_1 \in (0.5; 0.9), \\ 0, & x_1 \in (0.9; 1). \end{cases} \quad (1.5.17)$$

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 . Дополнительные сведения о значениях $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_3 получены в результате проведения квазиреальных экспериментов. Численно решались прямые задачи (1.5.5)–(1.5.8) для граничных режимов (1.5.15), (1.5.16), (1.5.17). По решениям прямых задач вычислялись значения $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_3 , которые и принимались за наблюдаемые потоки.

На рисунках 1.5.1–1.5.9 представлены следующие сведения о вычислительных экспериментах:

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений функционала $J(\xi_i^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_i^{(j)} = \|\xi_i^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}$, $j = 1, 2, 3$.

В таблицах (1.5.1)–(1.5.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

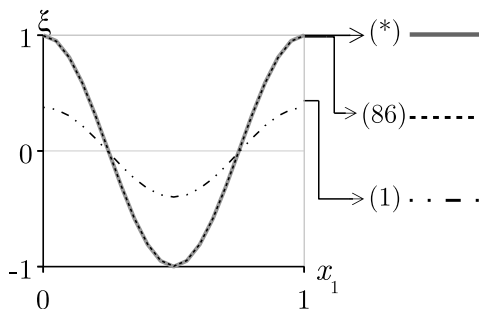


Рис. 1.5.1. Восстановление гладкого граничного режима

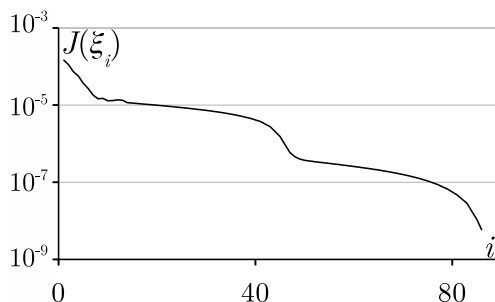


Рис. 1.5.2. Значения целевого функционала при восстановлении гладкого граничного режима

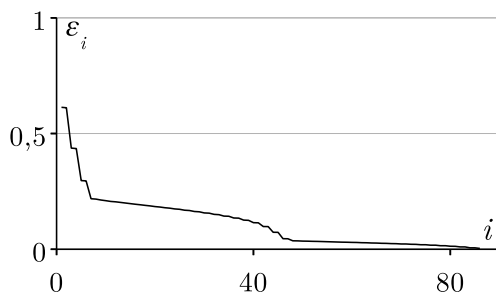


Рис. 1.5.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

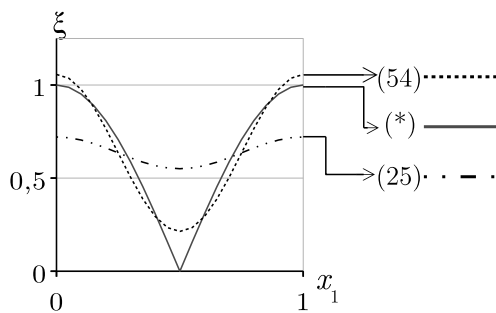


Рис. 1.5.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

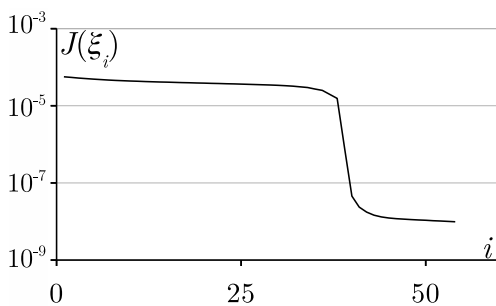


Рис. 1.5.5. Значения целевого функционала при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

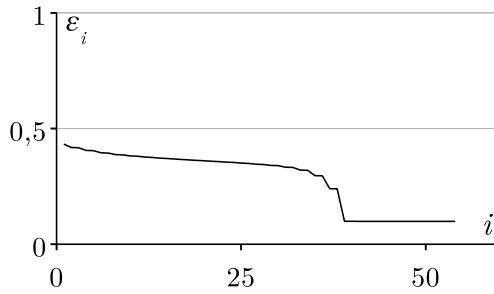


Рис. 1.5.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

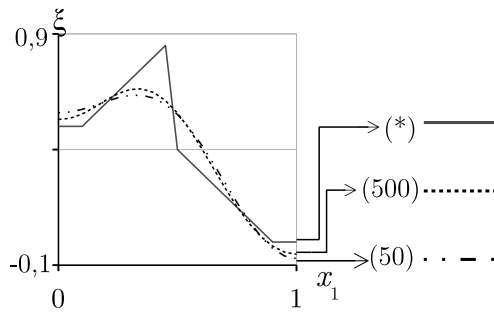


Рис. 1.5.7. Восстановление разрывного граничного режима

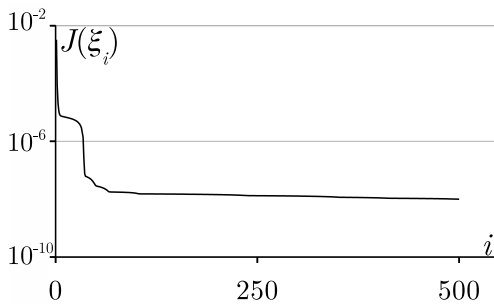


Рис. 1.5.8. Значения целевого функционала при восстановлении разрывного граничного режима

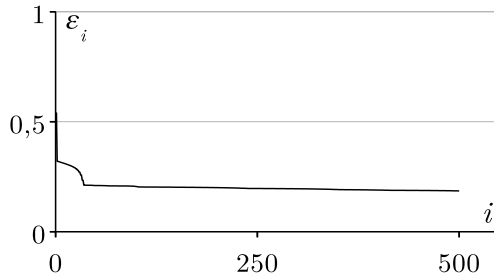


Рис. 1.5.9. Значения относительной погрешности при восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 1.5.1. Результаты восстановления $\xi^{(1)}$

i	1	20	60	86
$J(\xi_i)$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$4.5 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
ε_i	$6.1 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1.5.2. Результаты восстановления $\xi^{(2)}$

i	1	15	45	54
$J(\xi_i)$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$9.8 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(2)}\ $	$3.2 \cdot 10^{-1}$	$2.7 \cdot 10^{-1}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$4.3 \cdot 10^{-1}$	$3.7 \cdot 10^{-1}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1.5.3. Результаты восстановления $\xi^{(3)}$

i	1	150	450	500
$J(\xi_i)$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(3)}\ $	$2.6 \cdot 10^{-1}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$	$9.1 \cdot 10^{-2}$	$9.0 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$5.4 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$	$1.85 \cdot 10^{-1}$

1.6. Метод квазиобращения решения обратной задачи

В этом параграфе для решения рассматриваемой обратной задачи предлагается воспользоваться методом квазиобращения [52]. Метод квазиобращения заключается во введении некоторых дополнительных дифференциальных членов с малыми параметрами в дифференциальный оператор в уравнении реакции-конвекции-диффузии. Ожидается, что подобное возмущение рассматриваемой обратной задачи делает ее корректно поставленной или, по крайней мере, обладающей большим запасом устойчивости. Решение возмущенной краевой задачи в некотором смысле сходится к решению исходной задачи при стремлении малых параметров к нулю.

Опишем метод решения поставленной обратной задачи (1.3.1)–(1.3.3) на основе метода квазиобращения. Рассмотрим вспомогательную задачу, включающую в себя регуляризованное уравнение реакции-конвекции-диффузии

$$\operatorname{div} (k \nabla T_\alpha) = (\mathbf{u}, \nabla T_\alpha) - q T_\alpha - f + \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.6.1)$$

при этом для искомой функции T_α граничные условия остаются прежними, то есть остаются условия (1.3.2), (1.3.3). Ожидается, что рассматриваемая вспомогательная задача (1.6.1), (1.3.2), (1.3.3) будет устойчивой при всех достаточно малых $\alpha > 0$ или будет обладать большим запасом устойчивости по сравнению с исходной задачей. Теоретически довольно трудно установить сходимость $\xi_\alpha(\cdot) \rightarrow \xi(\cdot)$ при $\alpha \rightarrow 0$, где $\xi_\alpha(\mathbf{x}) = T_\alpha(\mathbf{x})|_{\Gamma_2}$, $\xi(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})|_{\Gamma_2}$.

Пусть далее при численном моделировании Ω является прямоугольной областью (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (1.5.5)–(1.5.8). Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (на-

блюдается) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (1.6.2)$$

Обратную задачу (1.5.5), (1.5.7), (1.5.8), (1.6.2) можно рассматривать как эволюционную задачу по пространственной переменной x_2 . В уравнении (1.5.5) введем новые обозначения $l = l_1$, $\vartheta = l_2$ и сделаем замену переменных $t = l_2 - x_2$, $x = x_1$. Тогда обратная задача запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(k \frac{\partial T}{\partial t} \right) + u_2 \frac{\partial T}{\partial t} = u_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - q T - f,$$

$$0 < t < \vartheta, \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < \vartheta,$$

$$T(x, 0) = 0, \quad k(x, 0) \frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = -\varphi(x), \quad 0 < x < l.$$

Возмущенное уравнение (1.6.1) в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(k \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} \right) + u_2 \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = u_1 \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \right) - \\ - q T_\alpha - f + \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x^2 \partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Это уравнение дополняется начальными и граничными условиями, вытекающими из (1.5.7), (1.5.8), (1.6.2)

$$T_\alpha(x, 0) = 0, \quad k(x, 0) \frac{\partial T_\alpha(x, 0)}{\partial t} = -\varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (1.6.4)$$

$$\frac{\partial T_\alpha(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_\alpha(l, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < \vartheta. \quad (1.6.5)$$

Для численного решения задачи (1.6.3)–(1.6.5) в области Ω задавалась равномерная расчетная сетка Ω_h . Итоговая конечно-разностная аппроксимация уравнения (1.6.3) записывается в следующем виде (индексы α у T для сокращения записи опущены)

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\tau^2} + u_{i,j}^{(2)} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\tau} - \\
& - \frac{\alpha}{\tau^2 h^2} \left(T_{i-1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j-1} \right) + \\
& + \frac{2\alpha}{\tau^2 h^2} \left(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} \right) - \\
& - \frac{\alpha}{\tau^2 h^2} \left(T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1} \right) = \\
& = - \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(1 + 0.5 |u_{i,j}^{(1)}| h) h^2} + \frac{|u_{i,j}^{(1)}|}{h} T_{i,j} + \\
& + \frac{u_{i,j}^{(1)} - |u_{i,j}^{(1)}|}{2h} T_{i+1,j} - \frac{u_{i,j}^{(1)} + |u_{i,j}^{(1)}|}{2h} T_{i-1,j} - \\
& - q_{i,j} T_{i,j} - f_{i,j}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1.6.6}
\end{aligned}$$

На каждом слое j разностное уравнение (1.6.6) решалось методом трехдиагональной прогонки. Для определения значений искомой функции при $j \in \{0, 1\}$ и $i \in \{0, N\}$ использовалась стандартная аппроксимация граничных условий (1.6.4), (1.6.5) [67].

Для выбора параметра регуляризации можно использовать различные способы. Например, хорошо зарекомендовал себя метод невязки [67], в котором используется заданная точность вычислительного эксперимента. Однако, оценки погрешности задания входных данных обычно не известны. Поэтому на практике часто пользуются нахождением квазиоптимального значения параметра регуляризации [67, 92], которое напрямую

не связано с уровнем погрешности. Для этого строится последовательность

$$\alpha_s = \alpha_0 b^s, \quad 0 < b < 1, \quad s = \overline{0, S},$$

и для нахождения квазиоптимального значения параметра регуляризации минимизируется норма разности

$$\|\xi_{\alpha_{s+1}}(\cdot) - \xi_{\alpha_s}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_3)} \rightarrow \min : s = \overline{0, S-1}, \quad \xi_\alpha = T_\alpha(\cdot, 0).$$

При формировании последовательности $\{\alpha_s\}$ для выбора квазиоптимального параметра регуляризации использовались параметры $\alpha_0 = 0.01$, $b = 0.75$, $S = 13$.

Численное моделирование проводилось на равномерной сетке 20×20 при фиксированных параметрах (1.5.14).

На рисунках 1.6.1–1.6.3 представлены результаты восстановления граничных режимов (1.5.15)–(1.5.17):

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);

В таблице (1.6.1) представлены результаты восстановления граничных режимов.

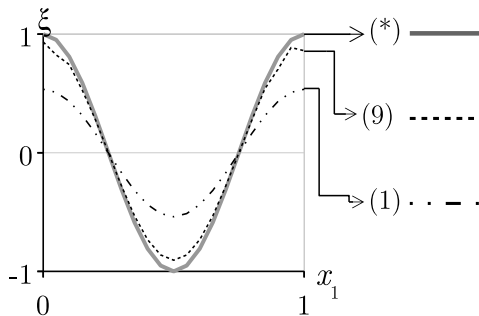


Рис. 1.6.1. Восстановление гладкого граничного режима

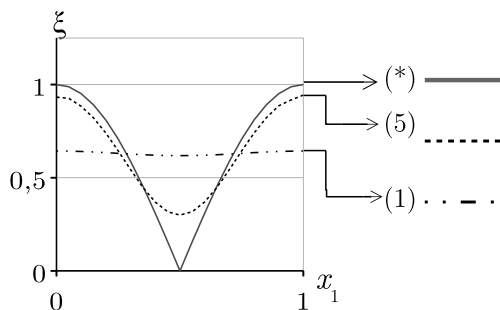


Рис. 1.6.2. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

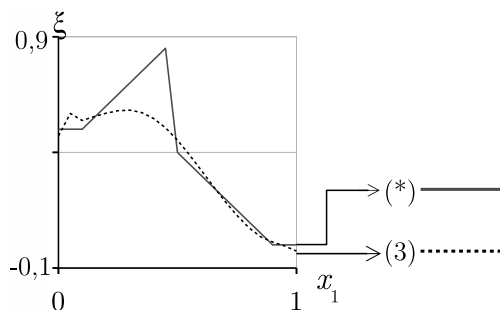


Рис. 1.6.3. Восстановление разрывного граничного режима

Таблица 1.6.1. Результаты восстановления граничных режимов

режим	α	ε
$\xi^{(1)}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$
$\xi^{(2)}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-2}$
$\xi^{(3)}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$

1.7. Метод Ньютона–Канторовича решения обратной задачи

Нахождение неизвестного теплового режима ξ на Γ_2 в обратной задаче (1.3.1)–(1.3.3) можно свести к решению операторного уравнения. Рассмотрим прямую задачу

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.7.1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.7.2)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (1.7.3)$$

Пусть на границе Γ_1 наблюдается поток

$$\varphi = k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1}. \quad (1.7.4)$$

Рассмотрим оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1),$$

где T — решение краевой задачи (1.7.1)–(1.7.3). Тогда обратная задача (1.7.1), (1.7.2), (1.7.4) сводится к решению операторного уравнения

$$A \xi = \varphi. \quad (1.7.5)$$

Для решения данного операторного уравнения (1.7.5) предлагается модифицировать метод Ньютона–Канторовича [34, с. 470], [19, с. 71]

$$\xi_{i+1} = \xi_i - [A'(\xi_i)]^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 2, \dots$$

введением параметра регуляризации α_i и демпфирующего множителя β_i . Итерационный процесс для модифицированного метода Ньютона–Канторовича определяется по формуле

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 2, \dots$$

Значение производной Фреше A' в точке ξ на элементе ζ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)\zeta = k \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_ζ — решение краевой задачи

$$L T_\zeta \equiv \operatorname{div} (k \nabla T_\zeta) - (\mathbf{u}, \nabla T_\zeta) + q T_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.7.6)$$

$$T_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.7.7)$$

$$T_\zeta = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (1.7.8)$$

Оператор $[A'(\xi)]_\alpha^{-1}$ действует следующим образом

$$[A'(\xi)]_\alpha^{-1}(\psi) = T_\alpha \Big|_{\Gamma_2},$$

где T_α — решение краевой задачи

$$L T_\alpha = \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.7.9)$$

$$T_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.7.10)$$

$$k \frac{\partial T_\alpha}{\partial \mathbf{n}} = \psi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (1.7.11)$$

Краевая задача (1.7.9)–(1.7.11) представляет собой регуляризацию квазиобращением краевой задачи (1.7.6)–(1.7.8).

Параметр α_i выбирается описанным в параграфе 1.6 способом. Демпфирующий множитель β_i определяется в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$\|A(\xi_i - \beta [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1}(A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_2)} \rightarrow \min : \beta > 0.$$

Пусть далее при численном моделировании Ω является прямоугольной областью (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (1.5.5)–(1.5.8). Пусть граничный

режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдаются) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Определим оператор A следующим образом

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_3} \in L_2(\Gamma_3).$$

Задача, необходимая для нахождения $[A'(\xi_i)]_{\alpha}^{-1}(\psi)$, $\psi = A(\xi_i) - \varphi$, запишется в виде

$$\operatorname{div}(k \nabla T_{\alpha}) = (\mathbf{u}, \nabla T_{\alpha}) - q T_{\alpha} + \alpha \frac{\partial^4 T_{\alpha}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.7.12)$$

$$T_{\alpha} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.7.13)$$

$$k \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (1.7.14)$$

$$k \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial \mathbf{n}} = \psi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (1.7.15)$$

Кратко опишем алгоритм численного решения операторного уравнения (1.7.5) модифицированным методом Ньютона-Канторовича. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги:

1. Известное $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и находим решение T_{ξ} этой краевой задачи.
2. Находим значение регуляризирующего параметра $\alpha = \alpha_i$.
3. По T_{ξ} находим

$$\psi = k \frac{\partial T_{\xi}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

подставляем эту функцию в задачу (1.7.12)–(1.7.15) и находим

$$[A'(\xi)]_{\alpha_i}^{-1}(\psi).$$

4. Вычисляем значение демпфирующего множителя $\beta = \beta_i$ и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$\|A(\xi_i) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} < \varepsilon_0,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры (1.5.14). В области Ω для численного решения прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и задачи (1.7.12)–(1.7.15) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l h_1, j h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \},$$

где $h_1 = 1/N_1$, $h_2 = 1/N_2$. На этой сетке соответствующие краевые задачи считались как описано в параграфе 1.6. Для ускорения счета при численном решении задачи (1.7.12)–(1.7.15) использовался постоянный параметр $\alpha = 0.05$.

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 . Рассчитывались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов (1.5.14)–(1.5.16).

На рисунках 1.7.1–1.7.9 представлены следующие сведения о результатах восстановления граничных режимов (1.5.14)–(1.5.16):

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений невязки $\|A(\xi_i^{(j)}) - \varphi\|$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_i^{(j)} = \|\xi_i^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}$, $j = 1, 2, 3$.

В таблицах (1.7.1)–(1.7.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

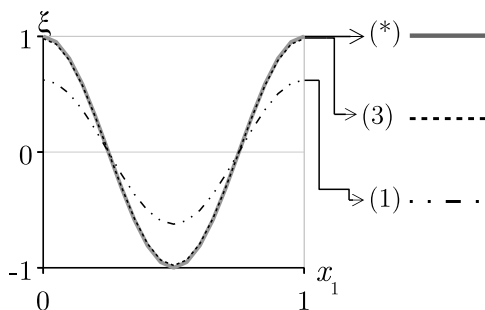


Рис. 1.7.1. Восстановление гладкого граничного режима

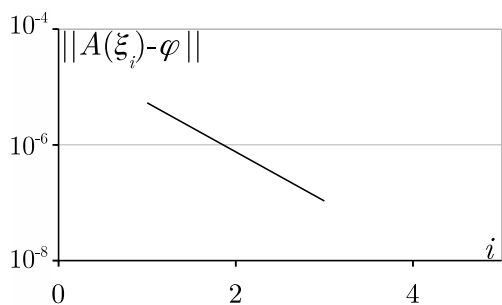


Рис. 1.7.2. Значения невязки при восстановлении гладкого граничного режима

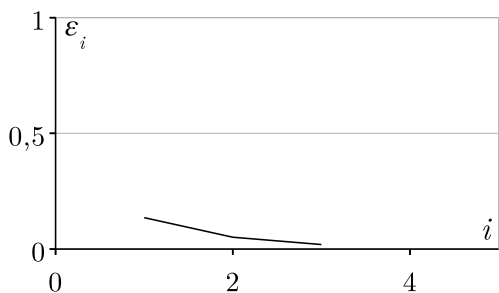


Рис. 1.7.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

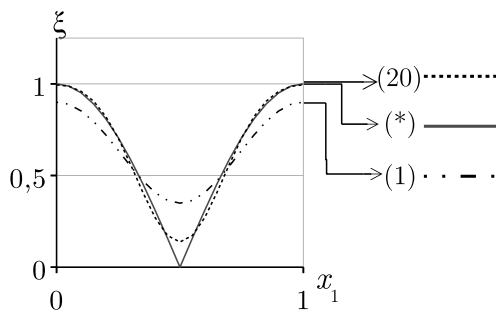


Рис. 1.7.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

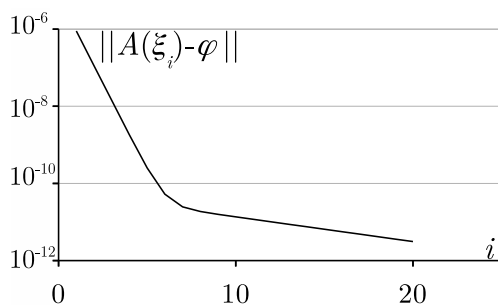


Рис. 1.7.5. Значения невязки при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

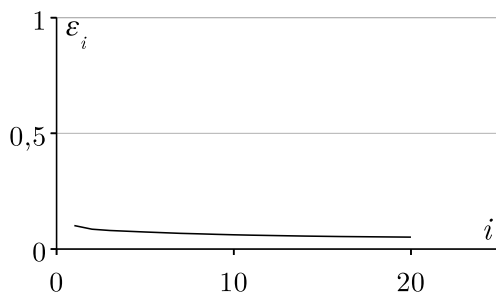


Рис. 1.7.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

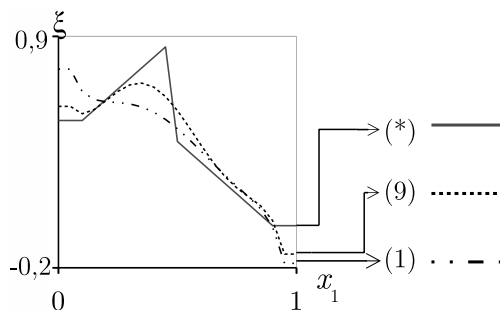


Рис. 1.7.7. Восстановление разрывного граничного режима

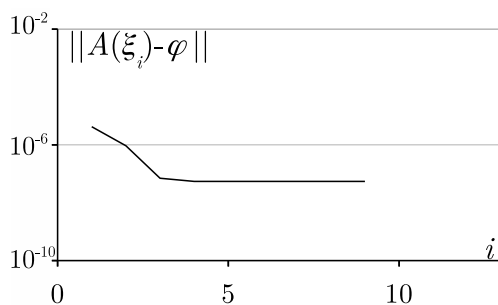


Рис. 1.7.8. Значения невязки при восстановлении разрывного граничного режима

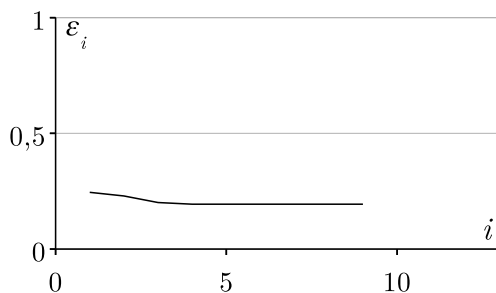


Рис. 1.7.9. Значения относительной погрешности при восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 1.7.1. Результаты восстановления $\xi^{(1)}$

i	1	3
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$7 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-12}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$6.8 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$9.1 \cdot 10^{-1}$	$1.83 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1.7.2. Результаты восстановления $\xi^{(2)}$

i	1	5	10	20
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$
$\ \xi_i - \xi^{(2)}\ $	$2.7 \cdot 10^{-1}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$3.6 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1.7.3. Результаты восстановления $\xi^{(3)}$

i	1	3	6	9
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$
$\ \xi_i - \xi^{(3)}\ $	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$

1.8. Метод Ландвебера решения обратной задачи

В этом параграфе предлагается для решения обратной задачи (1.3.1)–(1.3.3) модифицировать классический метод Ландвебера (или метод простой итерации) [19, 26].

Рассмотрим прямую задачу (1.7.1)–(1.7.3). Пусть на границе Γ_1 наблюдается поток (1.7.4). Тогда решение соответствующей обратной задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.4) сводится к решению операторного уравнения (1.7.5).

Для решения операторного уравнения (1.7.5) модифицируем классический метод Ландвебера

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, \dots,$$

вводя регуляризующую добавку $\beta_i \xi_i$ и выбирая подходящее значение параметра α_i на каждой итерации. Для модифицированного таким образом метода Ландвебера итерационный процесс осуществляется по формулам

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta_i \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Значение производной Фреше $A'(\xi)$ оператора A на элементе $h \in L_2(\Gamma_2)$ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)h = k \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_h — решение краевой задачи

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$T = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Для того, чтобы найти значение оператора $A'(\xi)^*$ на элементе $\zeta \in L_2(\Gamma_1)$ необходимо получить равенство вида

$$\langle A'(\xi)h, \zeta \rangle_{L_2(\Gamma_1)} = \langle h, \Psi(\xi; \zeta) \rangle_{L_2(\Gamma_2)},$$

где элемент $\Psi(\xi; \zeta)$ будет значением $A'(\xi)^* \zeta$. Выполним ряд вспомогательных преобразований. Функция $T = T_h$ для любой функции $g \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) dx = \\ = \int_{\Gamma_2} h k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g d\Gamma. \end{aligned}$$

Пусть функция $g = g_{\zeta}$ удовлетворяет вспомогательной краевой задаче

$$\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.8.1)$$

$$g = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.8.2)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.8.3)$$

тогда

$$\int_{\Gamma_2} h k \frac{\partial g_{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{n}} \zeta d\Gamma.$$

Таким образом, получаем

$$A'(\xi)^* \zeta = k \frac{\partial g_{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2}.$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается одномерная задача минимизации:

$$\| A(\xi_i - \alpha A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Параметр β_i определялся в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$\| A(\xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta \xi_i) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

Пусть далее при численном моделировании Ω является прямоугольной областью (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (1.5.5)–(1.5.8). Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдаются) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Определим оператор A следующим образом

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_3} \in L_2(\Gamma_3).$$

Вспомогательная краевая задача (1.8.1)–(1.8.3) примет вид

$$\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.8.4)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.8.5)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (1.8.6)$$

$$g = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (1.8.7)$$

Опишем кратко алгоритм численного решения операторного уравнения (1.7.5) модифицированным методом Ландвевбера. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Заданную или найденную на предыдущем шаге функцию $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и находим решение T_ξ этой краевой задачи.

2. Во вспомогательную задачу (1.8.4)–(1.8.7) подставляем функцию

$$\zeta = k(x_1) \frac{\partial T_\xi(x_1, l_2)}{\partial x_2} - \varphi(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1,$$

и находим ее решение $g = g_\zeta$.

3. По вычисленному $g = g_\zeta$ находим значение

$$A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) .$$

4. Вычисляем значения параметров α_i , β_i и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$\|A(\xi_i) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} < \varepsilon_0 ,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры (1.5.14). В области Ω для численного решения прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и вспомогательной краевой задачи (1.8.4)–(1.8.7) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l h_1, j h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \} ,$$

где $h_1 = 1/N_1$, $h_2 = 1/N_2$.

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 . Рассматривались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов различной степени гладкости (1.5.14)–(1.5.16).

На рисунках 1.8.1–1.8.9 представлены результаты восстановления граничных режимов (1.5.15)–(1.5.17):

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений невязки $\|A(\xi_i^{(j)}) - \varphi\|$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$.

В таблицах (1.8.1)–(1.8.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

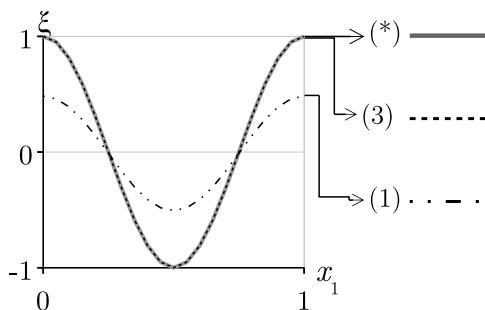


Рис. 1.8.1. Восстановление гладкого граничного режима

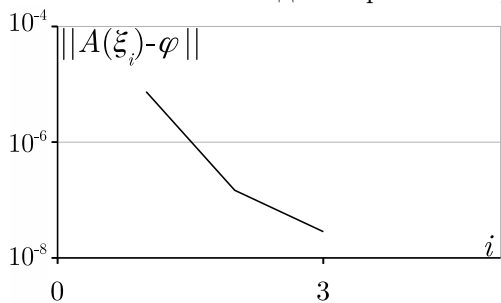


Рис. 1.8.2. Значения невязки при восстановлении гладкого граничного режима

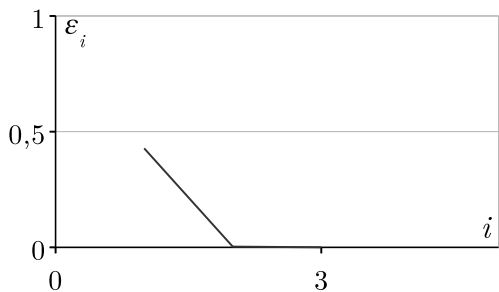


Рис. 1.8.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

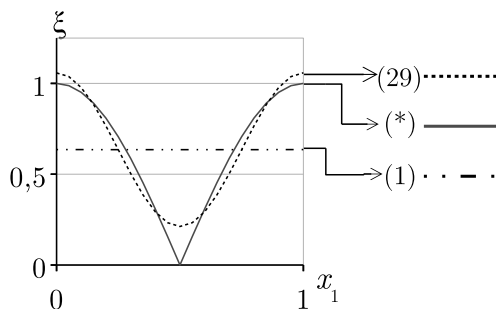


Рис. 1.8.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

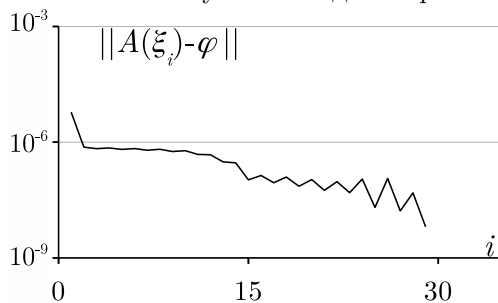


Рис. 1.8.5. Значения невязки при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

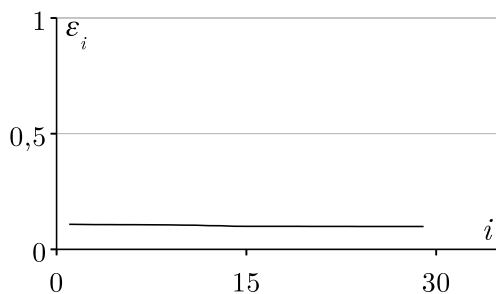


Рис. 1.8.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

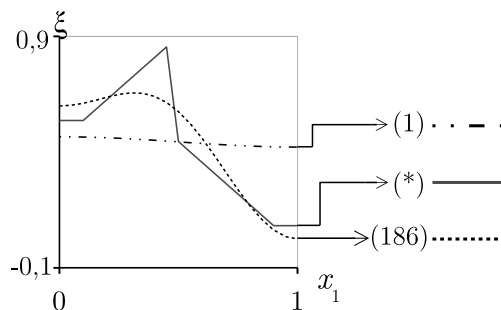


Рис. 1.8.7. Восстановление разрывного граничного режима

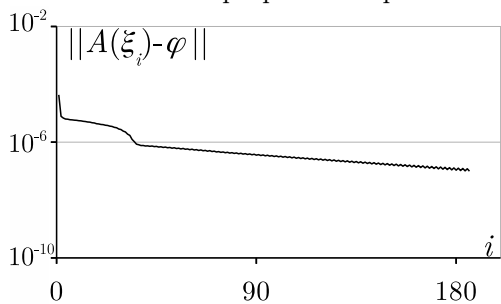


Рис. 1.8.8. Значения невязки при восстановлении разрывного граничного режима

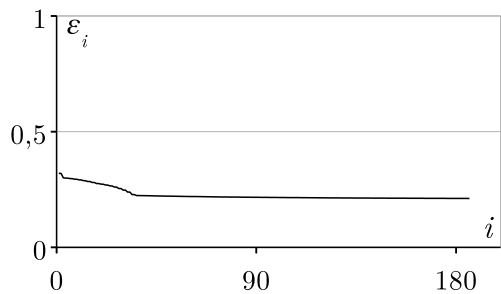


Рис. 1.8.9. Значения относительной погрешности при восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 1.8.1. Результаты восстановления $\xi^{(1)}$

i	1	2	3
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-10}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$3.2 \cdot 10^{-1}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
ε_i	$4.3 \cdot 10^{-1}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$

Таблица 1.8.2. Результаты восстановления $\xi^{(2)}$

i	1	10	20	29
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$8 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-2}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1.8.3. Результаты восстановления $\xi^{(3)}$

i	1	90	186
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$9.9 \cdot 10^{-8}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$
ε_i	$3.2 \cdot 10^{-1}$	$2.2 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$

1.9. Метод Левенберга-Марквардта решения обратной задачи

В этом параграфе предлагается для решения обратной задачи (1.3.1)–(1.3.3) модифицировать метод Левенберга-Марквардта [18, 19, 22].

Рассмотрим прямую задачу (1.7.1)–(1.7.3). Пусть на границе Γ_1 наблюдается поток (1.7.4). Тогда решение соответствующей обратной задачи (1.7.1), (1.7.2), (1.7.4) может быть сведено к решению операторного уравнения (1.7.5).

Для решения операторного уравнения (1.7.5) модифицируем метод Левенберга-Марквардта

$$\xi_{i+1} = \xi_i - [A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) + \alpha E]^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi),$$

вводя демпфирующий множитель β_i и выбирая подходящее значение коэффициента α на каждой итерации. Для модифицированного таким образом метода Левенберга-Марквардта итерационный процесс строится по следующим формулам

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) + \alpha_i E]^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi).$$

Значение производной Фреше $A'(\xi)$ оператора A на элементе $h \in L_2(\Gamma_2)$ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)h = k \frac{\partial T_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где $T = T_h$ — решение краевой задачи

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.9.1)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.9.2)$$

$$T = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (1.9.3)$$

Значение оператора $A'(\xi)^*$ на элементе $\zeta \in L_2(\Gamma_1)$ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)^* \zeta = k \frac{\partial g_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2},$$

где g_ζ — решение вспомогательной задачи (1.8.1)–(1.8.3).

Введем следующие обозначения:

$$B = A'(\xi_i)^* A'(\xi_i), \quad \eta_i = A'(\xi_i)^* \zeta_i, \quad \zeta_i = A(\xi_i) - \varphi.$$

Тогда итерационный процесс для модифицированного метода Левенберга-Марквардта переписывается в виде

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i (B + \alpha_i E)^{-1} \eta_i.$$

Для нахождения $\mu = [B + \alpha E]^{-1} \eta$ построим внутренний итерационный процесс:

$$\mu_{j+1} = \eta + [B + (\alpha - 1) E] \mu_j.$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается задача одномерной минимизации:

$$\|A(\xi_i - (B + \alpha E)^{-1} \eta_i) - \varphi\| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Весовой коэффициент β_i находится в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$\|A(\xi_i - \beta (B + \alpha_i E)^{-1} \eta_i) - \varphi\| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

Пусть далее при численном моделировании Ω является прямоугольной областью (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (1.5.5)–(1.5.8). Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдаются) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Оператор A определен следующим образом

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_3} \in L_2(\Gamma_3).$$

Вспомогательная краевая задача примет вид (1.8.4)–(1.8.7), краевая задача (1.9.1)–(1.9.3) запишется в виде

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.9.4)$$

$$T = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.9.5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (1.9.6)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (1.9.7)$$

Опишем кратко алгоритм численного решения операторного уравнения (1.7.5) модифицированным методом Левенберга-Марквардта. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Заданную или найденную на предыдущем шаге функцию $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и находим решение T_ξ этой краевой задачи.

2. В краевую задачу (1.8.4)–(1.8.7) подставляем

$$\zeta = A(\xi_i) - \varphi$$

и находим ее решение $g = g_\zeta$.

3. По вычисленному $g = g_\zeta$ находим $\eta = A'(\xi_i)^* \zeta$.

4. Вычисляем значения параметров α_i, β_i и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$\|A(\xi_i) - \varphi\| < \varepsilon_0,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры (1.5.14). В области Ω для численного решения прямой задачи (1.5.5)–(1.5.8) и задачи (1.7.12)–(1.7.15) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l h_1, j h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \},$$

где $h_1 = 1/N_1, h_2 = 1/N_2$.

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 . Рассчитывались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов (1.5.14)–(1.5.16).

На рисунках 1.9.1–1.9.21 представлены результаты восстановления граничных режимов (1.5.14)–(1.5.16):

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений невязки $\|A(\xi_i^{(j)}) - \varphi\|$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$.

В таблицах (1.9.1)–(1.9.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

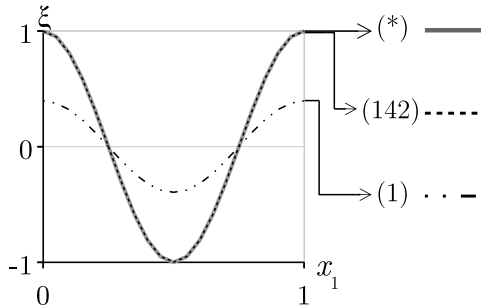


Рис. 1.9.1. Восстановление гладкого граничного режима

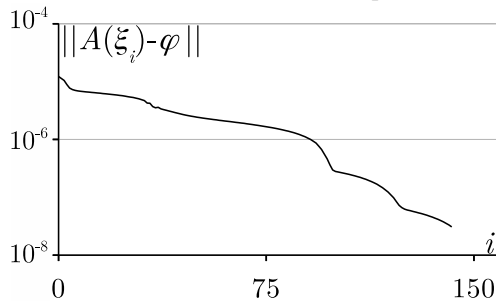


Рис. 1.9.2. Значения невязки при восстановлении гладкого граничного режима

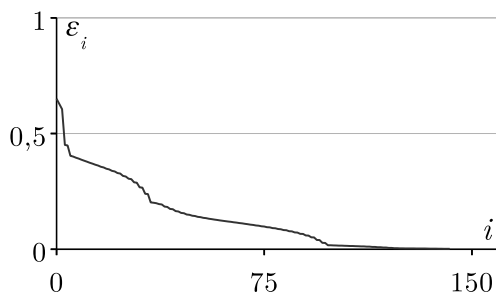


Рис. 1.9.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

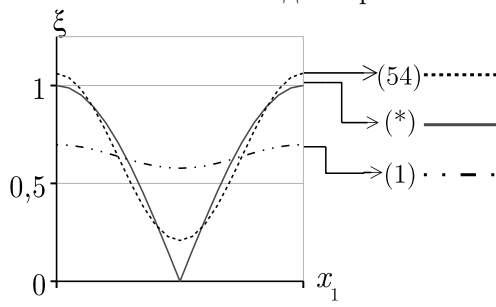


Рис. 1.9.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

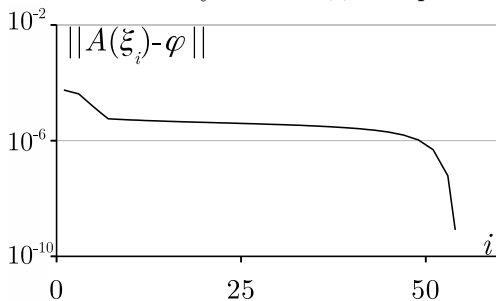


Рис. 1.9.5. Значения невязки при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

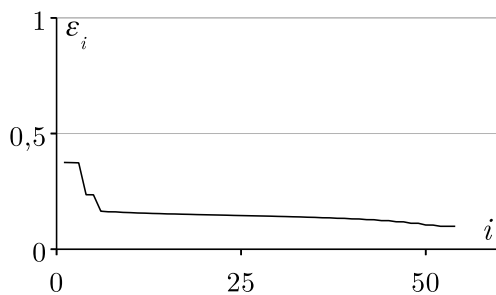


Рис. 1.9.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

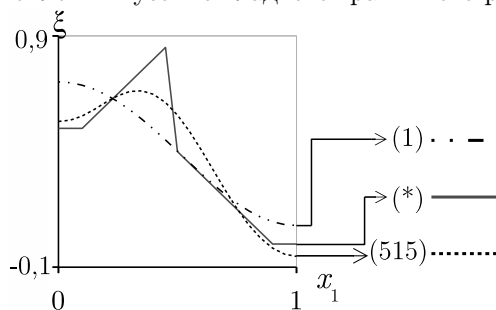


Рис. 1.9.7. Восстановление разрывного граничного режима

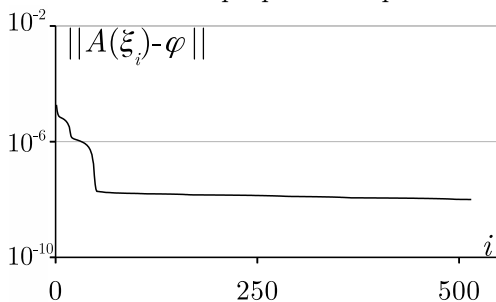


Рис. 1.9.8. Значения невязки при восстановлении разрывного граничного режима

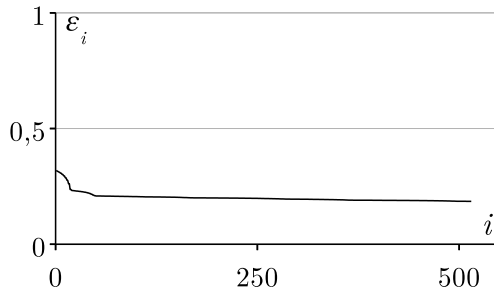


Рис. 1.9.9. Значения относительной погрешности при
восстановлении разрывного режима

Таблица 1.9.1. Результаты восстановления $\xi^{(1)}$

i	1	50	100	142
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-8}$	$9.4 \cdot 10^{-10}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$4 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
ε_i	$6 \cdot 10^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1.9.2. Результаты восстановления $\xi^{(2)}$

i	1	20	40	54
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$8.1 \cdot 10^{-10}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$2.7 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$9.7 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$3.7 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1.9.3. Результаты восстановления $\xi^{(3)}$

i	1	200	400	515
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$9.7 \cdot 10^{-2}$	$9.2 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$

2. Прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости

В этой главе ставятся и исследуются прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости. Такие модели могут использоваться при исследовании различных геофизических процессов [104, 105, 110]. Решение многих геофизических задач чрезвычайно важно с точки зрения их приложений, к примеру, осадочные бассейны являются природными хранителями полезных ископаемых, в частности, большинство исследованных месторождений нефти и газа связаны с такими геологическими структурами; изучение вулканов и их теплового режима помогает в предсказании вулканических извержений; мантийная конвекция является одной из причин движения континентов на планете и источником землетрясений, происходящих на границах разломов литосферных плит. Кроме того, модели конвекции высоковязкой жидкости могут использоваться в промышленности при отработке процессов изготовления стекла в плавильных печах [102].

Прямая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при заданных данных на границе области изменения независимой пространственной переменной (области протекания процесса). Обратная граничная задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при заданных данных на некоторой части границы области изменения независимой пространственной переменной (на той части границы, где прямое измерение этого решения возможно) и взятии подходящего следа от этого решения на другой части границы области изменения независимой пространственной переменной (на той части границы, где прямое измерение это-

го решения по каким-либо причинам невозможно). При этом предполагается, что на той части границы, где заданы исходные краевые условия (на которой прямые измерения возможны), заданы некоторые дополнительные граничные условия. Математическая постановка прямой задачи приводит к смешанной краевой задаче для системы эллиптических уравнений второго порядка. Математическая постановка обратной задачи приводит к обобщенной задаче Коши для системы эллиптических уравнений второго порядка. Особенность прямой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Граничные данные не являются гладкими и их нельзя продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать для переброски граничных данных в уравнение. Это приводит к необходимости ослабления понятия решения прямой задачи. Особенность обратной задачи состоит в ее нелинейности и некорректности в соответствующих пространствах граничных данных. Это приводит к необходимости построения специальных регуляризованных методов решения таких задач.

Для прямой и обратной задач вводятся понятия слабого решения и отмечаются свойства этих решений.

Разработаны специальные регуляризирующие методы и алгоритмы решения обратных задач. Подробно описаны вариационный метод, метод квазиобращения, модификации известных методов Ньютона–Канторовича, Ландвебера, Левенберга–Марквардта. Приводятся результаты численного моделирования решения обратных задач с граничными режимами различной степени гладкости.

2.1. Постановка прямой граничной задачи

Охарактеризуем сначала содержательную сторону задачи. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, рассматривается движение высоковязкой несжимаемой теплопроводной ньютоновской жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима. Математическая модель установившегося движения такой жидкости представлена следующей обезразмеренной краевой задачей в приближении Буссинеска [25, 51, 90, 98]

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.2)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.1.4)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.1.5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (2.1.6)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства \mathbb{R}^m ; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — вектор скорости движения среды в точках \mathbf{x} области Ω ; $p = p(\mathbf{x})$ — давление; Ra — число Рэлея; $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — температура среды в области Ω ; $k = k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент температуропроводности среды в области Ω ; $v = v(\mathbf{x})$ и $w = w(\mathbf{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_2 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω , с окружающей средой (функция $v = v(\mathbf{x})$ характеризует заданное распределение температуры на Γ_1 , функция $w = w(\mathbf{x})$ характеризует заданное распределение потока тепла на Γ_2 , $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$); \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω ; \mathbf{e}_m — орт оси x_m .

Рассматриваемая модель естественной тепловой конвекции наиболее близка к моделям рассмотренным в [25, 98, 104–110]. В данной модели используются следующие допущения:

1. Рассматривается установившийся процесс теплообмена.
2. Вязкость жидкости считается постоянной.
3. Плотность жидкости зависит только от температуры.
4. Не учитывается генерация тепла, обусловленная диссипацией механической энергии во внутреннюю из-за вязкого трения.
5. Не учитывается генерация тепла, обусловленная другими внутренними источниками.

Прямая граничная задача состоит в нахождении распределения температуры T и скорости движения среды \mathbf{u} в области Ω в результате решения краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6).

Эту задачу иногда кратко будем называть прямой задачей.

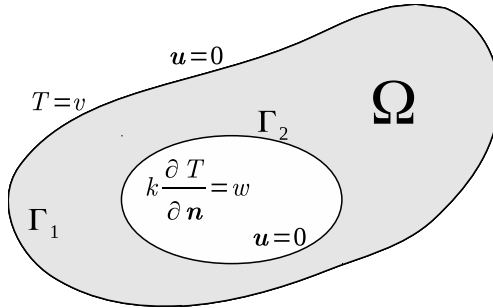


Рис. 2.1.1. Иллюстрация к постановке прямой задачи

Уточним постановку прямой задачи.

Будем считать, что область Ω принадлежит тем же классам областей, которые использовались в предыдущей главе. Далее будут использоваться те же самые пространства функций $L_p(\Omega)$, $L_p(\Gamma)$, $L_p(\Gamma_1)$, $L_p(\Gamma_2)$, $W_p^l(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_2)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$,

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \right\},$$

$$G_1(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1 \right\},$$

$$G_2(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\},$$

которые использовались в предыдущей главе.

Пусть далее для определенности

$$k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad v \in L_2(\Gamma_1), \quad w \in L_2(\Gamma_2);$$

$$0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad \mu_1 = \text{const} \leq \mu_2 = \text{const}.$$

При указанных условиях на параметры краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6), она может не иметь ни классического, ни обобщенного решения [4, 51, 90]. Введем понятие слабого решения краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6), следуя [53]. Более подробные рассуждения и выкладки см. в [32, 33, 36, 39].

Слабым решением краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) назовем пару функций $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, которая для любой пары $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$ удовлетворяет интегральным равенствам

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T(\mathbf{e}_m, \mathbf{f}) dx, \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} T \left(\text{div}(k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx = \\ & = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Таким образом, прямая граничная задача состоит в нахождении слабого решения краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6).

Прямая задача будет использоваться при решении обратной задачи.

Замечание 2.1.1. Давление p исключается из равенств (2.1.7), (2.1.8) в силу того, что компонента \mathbf{u} решения ищется в классе соленоидальных функций равных нулю на границе Γ ,

т. е. в классе $\mathbf{H}(\Omega)$, такому же классу принадлежит и функция $\mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla p, \mathbf{f}) dx = 0 \quad \forall p \in W_2^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Если найдено слабое решение $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6), то согласно [51], [90, с. 20–27], существует такая функция $p \in L_2(\Omega)$, что пара (\mathbf{u}, p) удовлетворяет уравнениям (2.1.1), (2.1.2) в смысле теории распределений. Если слабое решение (\mathbf{u}, T) обладает достаточной гладкостью, то скалярная функция p может быть найдена с помощью интегрирования из уравнения (2.1.1). Функция p определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Замечание 2.1.2. Из способа введения слабого решения краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) (см. подробные рассуждения в [32, 33, 36, 39]) вытекает следующее заключение. Если краевая задача (2.1.1)–(2.1.6) допускает классическое решение, то классическое решение этой краевой задачи, принадлежащее соответствующим пространствам Соболева, является и ее сильным решением из пространства $\mathbf{W}_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$, и ее обобщенным решением из пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, и ее слабым решением из пространства $\mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$. С другой стороны, достаточно гладкое и принадлежащее соответствующему пространству Соболева, слабое решение краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) будет являться и ее обобщенным решением, и ее сильным решением, и ее классическим решением. Соответствующие обоснования утверждений замечания аналогичны [49–51, 59, 90].

Замечание 2.1.3. Наряду с поставленной прямой задачей, так же как и при изучении обратных задач и численном моделировании, могут рассматриваться варианты задач, в которых граница Γ разделена на большее конечное число частей, на каждой из которых задается граничное условие первого, второго или третьего рода. Такие варианты задач изучаются совершенно аналогично и результаты в таких задачах также получа-

ются аналогичными. В частности, при исследовании одного из вариантов обратной задачи ниже будет использоваться прямая задача

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.10)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.1.12)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.1.13)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.1.14)$$

Далее, при численном моделировании, в качестве Ω будет рассматриваться прямоугольная область (1.1.6)–(1.1.10), граница которой условно разделена на четыре части. На границах Γ_2 и Γ_4 будут заданы неизменные условия теплоизолированности

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4.$$

Граница Γ_1 будет недоступна измерениям, на ней необходимо будет определить граничный режим

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Граница Γ_3 будет доступна измерениям, на ней будут заданы условия (измерения)

$$T = 0, \quad k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

2.2. Разрешимость и устойчивость прямой граничной задачи

Прямую задачу (2.1.1)–(2.1.6) будем считать корректно поставленной если она имеет единственное слабое решение, которое непрерывно зависит от входных граничных данных $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$. Слабая разрешимость, единственность и устойчивость краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) доказана в работах [32, 33, 36–39]. Приведем формулировки соответствующих теорем.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\operatorname{div} (k \nabla \Phi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2.1)$$

$$\Phi = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.2.2)$$

$$k \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.2.3)$$

Слабым решением краевой задачи (2.2.1)–(2.2.3) назовем функцию $\Phi \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \operatorname{div} (k \nabla \psi) dx = \\ & = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \psi d\Gamma, \quad \forall \psi \in G_2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Теорема 2.2.1. *Слабое решение краевой задачи (2.2.1) – (2.2.3) существует и единственно.*

От краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) перейдем к рассмотрению аналогичной краевой задачи с однородными граничными условиями для T . Для этого введем замену $\tilde{T} = T - \Phi$, где Φ — слабое решение краевой задачи (2.2.1)–(2.2.3). Тогда однородная задача, соответствующая краевой задаче (2.1.1)–(2.1.6), запишется в следующей форме

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra (\tilde{T} + \Phi) \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2.6)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla \tilde{T}) = (\mathbf{u}, (\nabla \tilde{T} + \nabla \Phi)), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.2.8)$$

$$\tilde{T} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.2.9)$$

$$k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.2.10)$$

Вопрос о разрешимости краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) сводится к вопросу о разрешимости краевой задачи (2.2.5)–(2.2.10). Решение этой краевой задачи понимается в обобщенном смысле.

Под обобщенным решением однородной краевой задачи (2.2.5)–(2.2.10) будем понимать пару функций $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$, которая для любой пары функций $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ удовлетворяет тождествам

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx = \operatorname{Ra} \int_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi) (\mathbf{e}_m, \mathbf{f}) dx, \quad (2.2.11)$$

$$\int_{\Omega} k (\nabla \tilde{T}, \nabla g) dx = \int_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi) (\mathbf{u}, \nabla g) dx. \quad (2.2.12)$$

Теорема 2.2.2. Пусть исходные данные краевой задачи (2.1.1) – (2.1.6) таковы, что $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$ и выполняется неравенство

$$2m C_1 \operatorname{Ra} \left(C_2 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \right) < \mu_1.$$

Тогда ее слабое решение $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющее тождествам (2.1.7), (2.1.8), существует и единственно. Кроме того, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$, а компонента T слабого решения может быть представлена в виде суммы $T = \tilde{T} + \Phi$, состоящей из компоненты $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$ обобщенного решения

$(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ краевой задачи (2.2.5) – (2.2.10) с однородными граничными условиями для \tilde{T} и слабого решения $\Phi \in L_2(\Omega)$ вспомогательной задачи (2.2.1) – (2.2.3) с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы следующие оценки

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)},$$

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{m C_4 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2}{\mu_1 - m C_1 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},$$

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq m \mu_1^{-1} \|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{\mu_1 C_4 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_1 - m C_1 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \mu_1^{-1} C_5 \text{Ra} \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – некоторые положительные константы, вычисляемые по известным параметрам задачи и не зависящие от оцениваемых и оценивающих величин.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2.3. Пусть исходные данные краевой задачи (2.1.9) – (2.1.14) таковы, что $v \in L_2(\Gamma_1)$, $\xi \in L_2(\Gamma_2)$ и выполняется неравенство

$$2 m C_1^* \text{Ra} \left(C_2^* \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3^* \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)} \right) < \mu_1.$$

Тогда ее слабое решение $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющее интегральным тождествам

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T (e_m, \mathbf{f}) dx,$$

$$\int_{\Omega} T \left(\text{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx =$$

$$= \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \xi k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$

для любой пары функций $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{H}(\Omega) \times \tilde{G}_2(\Omega)$,

$$\tilde{G}_2(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma \right\},$$

существует и единственно. Кроме того, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$, а компонента T слабого решения может быть представлена в виде суммы $T = \tilde{T} + \Phi$, состоящей из компоненты $\tilde{T} \in \tilde{G}_1(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma \right\}$ обобщенного решения $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times \tilde{G}_1(\Omega)$ краевой задачи (2.2.5) – (2.2.10) с однородными граничными условиями для \tilde{T} и слабого решения $\Phi \in L_2(\Omega)$ вспомогательной задачи

$$\operatorname{div} (k \nabla \Phi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\Phi = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\Phi = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2,$$

с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы следующие оценки

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_2^* \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3^* \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)},$$

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{m C_4^* \operatorname{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2}{\mu_1 - m C_1^* \operatorname{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},$$

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m \mu_1^{-1} \|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{\mu_1 C_4^* \operatorname{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{\mu_1 - m C_1^* \operatorname{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leqslant \mu_1^{-1} C_5^* \operatorname{Ra} \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)},$$

где $C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*, C_5^*$ — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным параметрам задачи и не зависящие от оцениваемых и оценивающих величин.

2.3. Постановка обратной граничной задачи

Охарактеризуем с содержательной точки зрения обратную граничную задачу, соответствующую прямой граничной задаче. Как и прежде, в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, рассматривается движение высоковязкой несжимаемой теплопроводной ньютоновской жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима.

Предположим, что граница Γ области Ω условно разделена на две части Γ_1 и Γ_2 . Считается, что на части Γ_1 границы возможно прямое измерение необходимых параметров среды (например, температуры или потока тепла). На части Γ_2 границы прямое измерение необходимых параметров среды невозможно, но знание этих параметров крайне необходимо.

Обратная граничная задача состоит в нахождении необходимых параметров сплошной среды на части Γ_2 границы Γ по всей совокупности граничных данных, имеющих на части Γ_1 границы Γ , при учете соответствующей модели, описывающей состояние среды в области Ω .

Для определенности будем считать, что на части Γ_1 границы задаются и известны температура $T = v$ и тепловой поток $k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi$. Искомыми величинами могут быть температура T на части Γ_2 границы, или тепловой поток $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на Γ_2 , или одновременно одно и другое. Будем считать, для определенности, что искомой величиной является температура T на части Γ_2 границы Γ . Варианты задачи с другими искомыми величинами могут изучаться совершенно аналогично. Это связано с тем, что обратные граничные задачи могут решаться в два этапа. На первом этапе (одинаковом для всех вариантов искомым величин) решается краевая задача

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3.2)$$

$$\operatorname{div}(k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.3.4)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.3.5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (2.3.6)$$

На втором этапе по найденному решению $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, находятся или след $T|_{\Gamma_2}$, или след $k \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2}$, или одновременно одно и другое, или что-нибудь еще. Итак, для определенности, далее будем рассматривать следующий вариант обратной граничной задачи.

Обратная граничная задача состоит в нахождении температуры $T|_{\Gamma_2}$ на части Γ_2 границы Γ в результате решения краевой задачи (2.3.1)–(2.3.6).

Эту задачу иногда кратко будем называть обратной задачей.

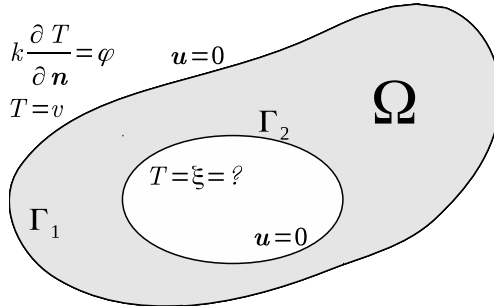


Рис. 2.3.1. Иллюстрация к постановке обратной задачи

Уточним постановку обратной задачи.

Будем считать, что все величины и параметры в обратной задаче (в краевой задаче (2.3.1)–(2.3.6)) удовлетворяют тем же условиям, каким удовлетворяют эти величины и параметры в прямой задаче, и пусть $\varphi \in L_2(\Gamma_1)$.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$G_3(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\}.$$

В пространстве $G_3(\Omega)$ будут использоваться скалярное произведение и норма пространства $W_2^2(\Omega)$ или эквивалентные ей нормы.

Слабым решением краевой задачи (2.3.1)–(2.3.6) назовем всякую пару функций $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, которая для любой пары $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_3(\Omega)$ удовлетворяет интегральным равенствам

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T \mathbf{e}_m \mathbf{f} dx, \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} T \left(\text{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx = \\ & = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi g d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Если ввести в рассмотрение нелинейный оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1}, \quad (2.3.9)$$

где T — решение краевой задачи

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3.10)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3.11)$$

$$\text{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.3.13)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.3.14)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (2.3.15)$$

то обратная задача сводится к решению нелинейного операторного уравнения

$$A \xi = \varphi. \quad (2.3.16)$$

Таким образом, обратная граничная задача состоит в нахождении следа $T|_{\Gamma_2}$ от соответствующего решения краевой задачи (2.3.1)–(2.3.6) или в решении операторного уравнения (2.3.16).

Замечание 2.3.1. Вернемся теперь к постановке задачи и вопросу о следах. Хорошо известно [49–51, 59, 71, 97], что функция $T \in L_2(\Omega)$, вообще говоря, может не иметь следов $T|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $T|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$ и тем более следов $\partial T/\partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $\partial T/\partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$. Чтобы сделать постановки обратных граничных задач корректными, можно было бы поступить следующим образом. Используемые здесь следы принадлежат более широким пространствам (пространствам функционалов, пространствам Соболева с отрицательными показателями [4, 54, 97]) и поэтому можно было бы поставить обратные граничные задачи с использованием этих пространств. Однако практическая и компьютерная реализация методов решения обратных задач стала бы тогда чрезвычайно трудной и громоздкой. Поэтому будем придерживаться в данной работе другого подхода. Будем считать, как это иногда делается [26, 52, 68], что параметры краевых задач принадлежат некоторым подпространствам используемых пространств, при привлечении которых соответствующие следы существуют в пространствах L_2 , постановки задач корректны, разрабатываемые методы и алгоритмы осуществимы.

2.4. Некорректность обратной граничной задачи

Обратная задача (2.3.1)–(2.3.6) является, вообще говоря, некорректной. Это следует из вполне непрерывности введенного в предыдущем параграфе оператора A . Тогда, если существует соответствующий оператор A^{-1} , то он не может быть ограниченным [34, гл. 4, § 6], поэтому решение обратной задачи не будет обладать свойством непрерывной зависимости от входных данных и обратная задача будет некорректной.

Для краевой задачи (2.1.1)–(2.1.6) справедливо утверждение.

Теорема 2.4.1. *Если $v_i \rightarrow v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $w_i \rightarrow w_0$ слабо в $L_2(\Gamma_2)$, то $T_i = T[v_i, w_i] \rightarrow T_0 = T[v_0, w_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$, где $T = T[v, w]$ — слабое решение краевой задачи (2.1.1) — (2.1.6).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.4.1.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.4.2. *Если $v_i \rightarrow v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $\xi_i \rightarrow \xi_0$ слабо в $L_2(\Gamma_2)$, то $T_i = T[v_i, \xi_i] \rightarrow T_0 = T[v_0, \xi_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$, где $T = T[v, \xi]$ — слабое решение краевой задачи (2.1.9) — (2.1.14).*

Замечание 2.4.1. Далее, при описании методов и алгоритмов решения обратных задач, некоторые промежуточные выкладки будут выполняться формально, однако они будут вполне законными, если исходные данные задачи считать принадлежащими подходящим подпространствам (см. аналогичные рассуждения в конце параграфа 1.4). Утверждения о гладкости решений в зависимости от гладкости исходных данных см. в [32, 33, 36, 39].

2.5. Вариационный метод решения обратной задачи

Нахождение неизвестного теплового режима ξ на Γ_2 в обратной задаче (2.3.1)–(2.3.6) можно свести к соответствующей вариационной задаче по схеме, описанной в параграфе 1.5. Рассмотрим прямую задачу

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.2)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5.4)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.5.5)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.5.6)$$

Пусть наблюдаемый тепловой режим $\varphi = k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_1 в обратной задаче (2.3.1)–(2.3.6) соответствует некоторому заранее неизвестному тепловому режиму $T = \xi^*$ на границе Γ_2 . Пусть T^* — компонента решения прямой задачи (2.5.1)–(2.5.6) при $\xi = \xi^*$, тогда $k \partial T^* / \partial \mathbf{n} = \varphi$ на Γ_1 . Пусть $L_2(\Gamma_2) \supseteq V$ — некоторое множество допустимых граничных режимов на границе Γ_2 и известно, что $\xi^* \in V$.

Для граничных режимов $\xi \in V$ рассмотрим функционал качества

$$J_0(\xi) = \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma,$$

где T_ξ — компонента решения прямой задачи (2.5.1)–(2.5.6). Функционал качества должен принимать нулевое значение при $\xi = \xi^*$ ($J_0(\xi^*) = 0$). Искомый граничный режим ξ^* является минимизирующим элементом в следующей вариационной (экстремальной) задаче:

$$J_0(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V,$$

то есть

$$\xi^* \in \operatorname{argmin} \left\{ J_0(\xi) : \xi \in V \right\}.$$

Для придания этой задаче минимизации некоторого запаса устойчивости введем в функционал J_0 стабилизирующую добавку $\alpha \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)}^2$ и рассмотрим следующий функционал:

$$J(\xi) = J_0(\xi) + \alpha \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)}^2, \quad (2.5.7)$$

где α — малый положительный параметр.

Таким образом, от решения обратной задачи (2.3.1)–(2.3.6) переходим к решению вариационной (экстремальной) задачи

$$J(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V.$$

Для минимизации функционала J можно воспользоваться вариантами метода сопряженных градиентов [15, с. 299], [99, 114]:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \lambda_i \nabla J(\xi_i).$$

Найдем градиент функционала $\nabla J(\xi)$. Зафиксируем элемент $\xi \in V$ и дадим ему приращение $h \in W_2^2(\Gamma_2)$. Необходимо найти линейную часть приращения функционала $J(\xi + h) - J(\xi)$. Пусть $(T_{\xi+h}, \mathbf{u}_{\xi+h}, p_{\xi+h})$ — решение прямой задачи (2.5.1) – (2.5.6) с граничным условием $T = \xi + h$ на Γ_2 , а $(T_\xi, \mathbf{u}_\xi, p_\xi)$ — решение прямой задачи (2.5.1) – (2.5.6) с граничным условием $T = \xi$ на Γ_2 . Обозначим разность этих решений через $(T, \mathbf{u}, p) = (T_{\xi+h} - T_\xi, \mathbf{u}_{\xi+h} - \mathbf{u}_\xi, p_{\xi+h} - p_\xi)$, она удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \nabla T) &= (\mathbf{u}, \nabla T) + (\mathbf{u}, \nabla T_\xi) + \\ &+ (\mathbf{u}_\xi, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5.11)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.5.12)$$

$$T = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.5.13)$$

Далее проведем ряд вспомогательных преобразований. Уравнение (2.5.8) умножим скалярно на вектор-функцию $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega)$ и получившееся равенство проинтегрируем по Ω . После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u} - \nabla p + \text{Ra } T \mathbf{e}_m) \mathbf{z} \, dx = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \mathbf{z} \, dx - \int_{\Omega} \nabla p \mathbf{z} \, dx + \\ &+ \int_{\Omega} \text{Ra } \mathbf{z} \mathbf{e}_m T \, dx = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} \Delta u_i z_i \, dx - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} z_i \, dx \right) + \\ &+ \int_{\Omega} \text{Ra } \mathbf{z} \mathbf{e}_m T \, dx = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} z_i \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{n}} u_i \, d\Gamma + \right. \\ &+ \int_{\Omega} \Delta z_i u_i \, dx - \int_{\Gamma} p z_i \cos(\mathbf{n}, x_i) \, d\Gamma + \left. \int_{\Omega} \frac{\partial z_i}{\partial x_i} p \, dx \right) + \\ &+ \int_{\Omega} \text{Ra } \mathbf{z} \mathbf{e}_m T \, dx = \left[\text{потребуем, чтобы } \mathbf{z}|_{\Gamma} = 0 \right. \\ &\left. \text{и } \text{div } \mathbf{z} = 0 \text{ в } \Omega \right] = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{z} \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega} \text{Ra } \mathbf{z} \mathbf{e}_m T \, dx. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{z} \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega} \text{Ra } \mathbf{z} \mathbf{e}_m T \, dx = 0. \quad (2.5.14)$$

Уравнение (2.5.10) умножим на вспомогательную скалярную функцию $g \in W_2^2(\Omega)$ и получившееся равенство проинтегрируем по Ω . После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla T) - \mathbf{u} \nabla T - \mathbf{u} \nabla T_{\xi} - \mathbf{u}_{\xi} \nabla T) g \, dx = \\
&= \int_{\Gamma} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma + \int_{\Gamma} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} T \, d\Gamma + \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \nabla g) T \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla T g \, dx - \\
&- \int_{\Omega} g \nabla T_{\xi} \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u}_{\xi} \nabla g T \, dx = \int_{\Gamma} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} h k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma + \\
&\int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla g) + \mathbf{u}_{\xi} \nabla g) T \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla T g \, dx - \int_{\Omega} g \nabla T_{\xi} \mathbf{u} \, dx = \\
&= \left[\text{потребуем, чтобы } k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} = 0, g|_{\Gamma_1} = 2 \left(k \frac{\partial T_{\xi}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) \right] = \\
&= 2 \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_{\xi}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} h \, d\Gamma + \\
&+ \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla g) + \mathbf{u}_{\xi} \nabla g) T \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla T g \, dx - \int_{\Omega} g \nabla T_{\xi} \mathbf{u} \, dx.
\end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_{\xi}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} h \, d\Gamma + \int_{\Omega} g \nabla T_{\xi} \mathbf{u} \, dx - \\
&- \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla g) + \mathbf{u}_{\xi} \nabla g) T \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla T g \, dx. \quad (2.5.15)
\end{aligned}$$

Сложим равенства (2.5.14) и (2.5.15), получим

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma &= \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma - \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{z} + g \nabla T_\xi) \mathbf{u} dx - \\
&- \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla g) + \mathbf{u}_\xi \nabla g + \operatorname{Ra} \mathbf{z} \mathbf{e}_m) T dx \quad (2.5.16)
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы для любых $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ выполнялись тождества

$$\int_{\Omega} (\Delta \mathbf{z} + g \nabla T_\xi) \mathbf{u} dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla g) + \mathbf{u}_\xi \nabla g + \operatorname{Ra} \mathbf{z} \mathbf{e}_m) T dx = 0.$$

Отметим, что для любых функций $q \in W_2^1(\Omega)$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla q, \mathbf{u}) dx = 0.$$

Потребуем, чтобы вспомогательные функции \mathbf{z} и g удовлетворяли краевой задаче

$$\Delta \mathbf{z} + g \nabla T_\xi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.18)$$

$$\operatorname{div}(k \nabla g) + \mathbf{u}_\xi \nabla g - \operatorname{Ra} \mathbf{z} \mathbf{e}_m = \nabla q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.19)$$

$$\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5.20)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (2.5.21)$$

$$g = 2 \left(\frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (2.5.22)$$

Далее краевую задачу (2.5.17)–(2.5.22) будем называть сопряженной задачей по отношению к прямой задаче (2.1.1)–(2.1.6). Если учесть (2.5.17)–(2.5.22), то выражение (2.5.16) запишется в виде

$$2 \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma.$$

Рассмотрим приращение функционала J в точке $\xi \in V$

$$\begin{aligned} J(\xi + h) - J(\xi) &= \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_{\xi+h}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma + \alpha \left\| \xi + h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 - \\ &- \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma - \alpha \left\| \xi \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 = 2 \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) d\Gamma + \\ &+ \left\| k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2 \alpha \int_{\Gamma_2} \xi h d\Gamma + \alpha \left\| h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 = \\ &= \int_{\Gamma_2} \left(k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + 2 \alpha \xi \right) h d\Gamma + \left\| k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \alpha \left\| h \right\|_{L_2(\Gamma_2)}^2. \quad (2.5.23) \end{aligned}$$

Можно показать, что два последних слагаемых в (2.5.23) составляют величину более высокого порядка малости, чем $\|h\|_{W_2^2(\Gamma_2)}$. Таким образом, (W_2^2, L_2) -градиент функционала J в точке ξ находится по формуле

$$\nabla J(\xi) = k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + 2 \alpha \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Для нахождения точек минимума функционала (2.5.7) будет использоваться метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса [99, 114]:

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \beta_i d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$d_i = \begin{cases} -\nabla J(\xi_i; \alpha_i), & i = 0, \\ -\nabla J(\xi_i; \alpha_i) + \gamma_i d_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{\|\nabla J(\xi_i; \alpha_i)\|_{L_2(\Gamma_2)}^2}{\|\nabla J(\xi_{i-1}; \alpha_{i-1})\|_{L_2(\Gamma_2)}^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр $\alpha = \alpha_i$, содержащийся в выражении $\nabla J(\xi_i; \alpha_i)$, необходимом для вычисления $d_i = d_i(\alpha)$. Для этого решается одномерная задача минимизации:

$$J(\xi_i + d_i(\alpha)) \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Шаг спуска β_i (демпфирующий множитель) определялся в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$J(\xi_i + \beta d_i) \rightarrow \min : \beta > 0.$$

Пусть далее при численном моделировании в качестве Ω рассматривается прямоугольная область (1.1.6)–(1.1.10).

В области Ω будет рассматриваться прямая задача вида

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - RaT \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.25)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.26)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5.27)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.5.28)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (2.5.29)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.5.30)$$

Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдается) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.5.31)$$

Тогда функционал (2.5.7) запишется в виде

$$J(\xi) = \int_0^{l_1} \left(k \frac{\partial T_\xi(x_1, l_2)}{\partial x_2} - \varphi(x_1) \right)^2 dx_1 + \alpha \int_0^{l_1} \xi(x_1)^2 dx_1. \quad (2.5.32)$$

Сопряженная задача, необходимая для нахождения градиента функционала (2.5.32), примет вид

$$\Delta z = \nabla q - \nabla g T_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.33)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.34)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla g) = -(\mathbf{u}_\xi, \nabla g) - Ra(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.35)$$

$$\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5.36)$$

$$g = 2 \left(\frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.5.37)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (2.5.38)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.5.39)$$

Опишем кратко алгоритм численного решения вариационной задачи. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Заданную или найденную на предыдущем шаге функцию $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и находим решение (\mathbf{u}_ξ, T_ξ) этой краевой задачи.

2. Подставляем (\mathbf{u}_ξ, T_ξ) в сопряженную задачу (2.5.31)–(2.5.39) и находим ее решение $(\mathbf{z}, g, q) = (\mathbf{z}_\xi, g_\xi, q_\xi)$.

3. По заданным $\xi = \xi_i$ и $g = g_\xi$ находим градиент

$$\nabla J(\xi_i; \alpha) = -k \frac{\partial g_{\xi_i}(x_1, 0)}{\partial x_2} + 2\alpha \xi_i(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1.$$

4. Выполняем очередную итерацию метода сопряженных градиентов и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$J(\xi_i) < \varepsilon_0 ,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

Обратимся теперь к моделированию конкретных примеров. При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры

$$k = 1, \quad \text{Ra} = 1, \quad l_1 = l_2 = 1. \quad (2.5.40)$$

В области Ω для численного решения прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и сопряженной задачи (2.5.31)–(2.5.39) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l h_1, j h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \},$$

где $h_1 = 1/N_1$ и $h_2 = 1/N_2$ — шаги сетки.

Для упрощения исходных систем уравнений в прямой и вспомогательной задачах от естественных переменных «скорость, давление» осуществляется переход к переменным «функция тока, вихрь скорости» [13, 67]:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = \text{rot}(u_1, u_2, 0) = (0, 0, \eta), \quad \eta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

где ψ — функция тока, η — третья компонента вихря скорости. Тогда уравнения (2.5.1), (2.5.2) и соответствующее граничное условие (2.5.4) преобразовываются к виду

$$-\Delta \eta = \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.41)$$

$$-\Delta \psi = \eta, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.5.42)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.5.43)$$

Прямая и вспомогательная задачи решаются методом установления. Для численного решения уравнений (2.5.41) – (2.5.43) при фиксированном T использовалась безусловно устойчивая линеаризованная разностная схема стабилизирующей поправки [67, с. 482,697]. Разностная схема для прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) может быть записана в следующем виде

$$\frac{\eta_{n+1/2} - \eta_n}{\tau} + \Lambda \eta_{n+1/2} - (T_{n+1})_{x_\alpha}^\circ = 0, \quad (2.5.44)$$

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1} - \eta_{n+1/2}}{\tau} + \sigma(\mathbf{x})(\psi_{n+1} - \psi_n) = 0, \quad (2.5.45)$$

$$\eta_{n+1} = \Lambda \psi_{n+1}, \quad (2.5.46)$$

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{\tau} + V(\mathbf{u}_n)T_{n+1} + \Lambda T_{n+1} = 0, \quad (2.5.47)$$

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2},$$

$$V(\mathbf{u})T = V_1(u_1)T + V_2(u_2)T,$$

$$V_i(u_i)T = \frac{1}{2} \left((u_i T)_{x_i}^\circ + u_i T_{x_i}^\circ \right),$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_1(x_1) + \sigma_2(x_2),$$

$$\sigma_i(x_i) = \begin{cases} 0, & h_i < x_i < l_i - h_i, \\ 2/h_i^4, & x_i = h_i, l_i - h_i. \end{cases}$$

Производная на границах Γ_2 и Γ_4 аппроксимируется со вторым порядком точности обычным образом [68, с. 119].

Аналогично решалась сопряженная задача (2.5.31)–(2.5.39).

Моделировались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов различной степени гладкости.

Пример 1: гладкий режим

$$\xi^{(1)}(x_1) = \cos(3\pi x_1). \quad (2.5.48)$$

Пример 2: непрерывный кусочно-гладкий режим

$$\xi^{(2)}(x_1) = \begin{cases} 0.1, & x_1 \in (0; 0.1) \cup (0.9; 1), \\ x_1, & x_1 \in (0.1; 0.5), \\ 1 - x_1, & x_1 \in (0.5; 0.9). \end{cases} \quad (2.5.49)$$

Пример 3: разрывный режим

$$\xi^{(3)}(x_1) = \begin{cases} 0.5, & x_1 \in (0; 0.1), \\ x_1 + 0.4, & x_1 \in (0.1; 0.5), \\ 0.9 - x_1, & x_1 \in (0.5; 0.9), \\ 0, & x_1 \in (0.9; 1). \end{cases} \quad (2.5.50)$$

Для получения дополнительной информации о значениях $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_3 проводились квазиреальные эксперименты. Численно решались прямые задачи (2.5.24)–(2.5.30) при граничных режимах (2.5.48), (2.5.49), (2.5.50). По результатам решения прямых задач вычислялись значения потока тепла $k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_3 , которые и принимались за наблюдаемые потоки.

На рисунках 2.5.1–2.5.9 представлены следующие сведения о вычислительных экспериментах:

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений функционала $J(\xi_i^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_i^{(j)} = \|\xi_i^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}$, $j = 1, 2, 3$.

В таблицах (2.5.1)–(2.5.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

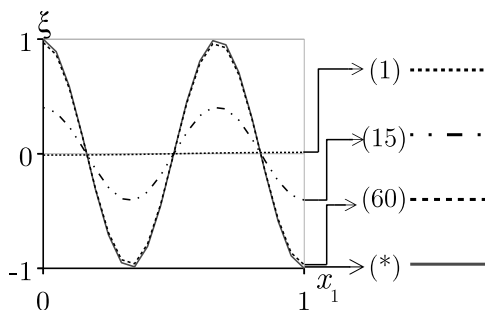


Рис. 2.5.1. Восстановление гладкого граничного режима

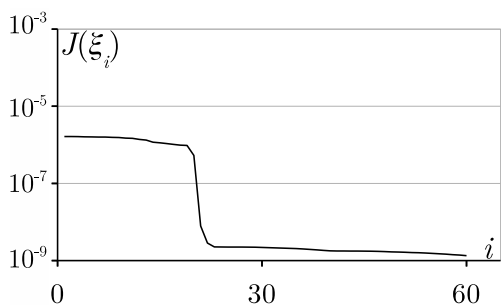


Рис. 2.5.2. Значения целевого функционала при восстановлении гладкого граничного режима

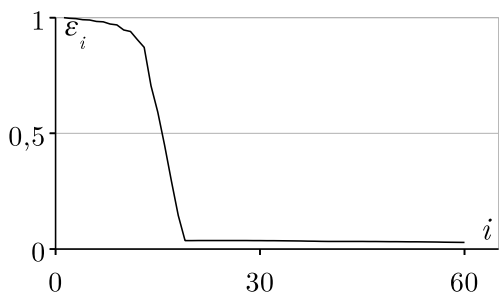


Рис. 2.5.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

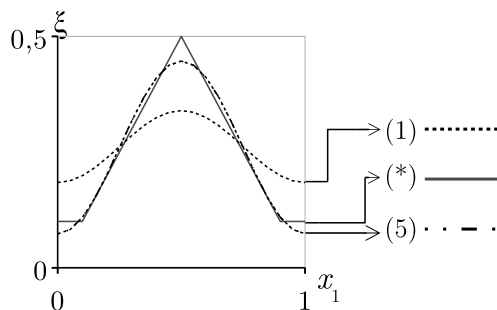


Рис. 2.5.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

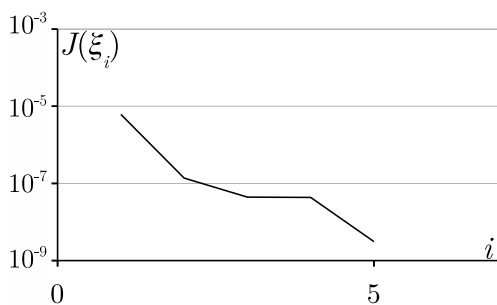


Рис. 2.5.5. Значения целевого функционала при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

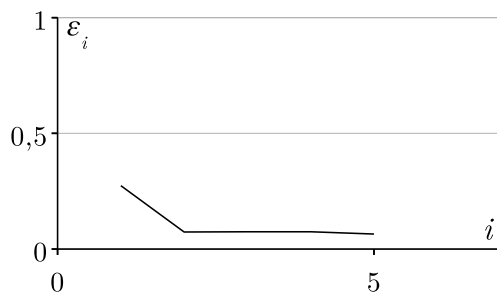


Рис. 2.5.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

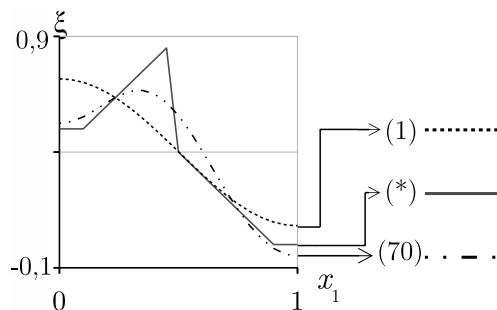


Рис. 2.5.7. Восстановление разрывного граничного режима

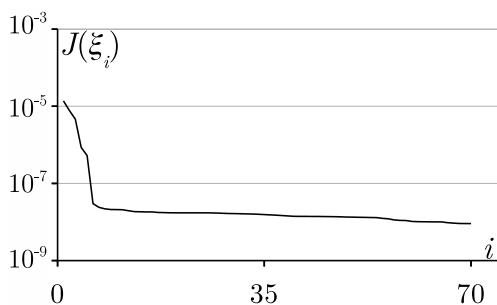


Рис. 2.5.8. Значения целевого функционала при восстановлении разрывного граничного режима

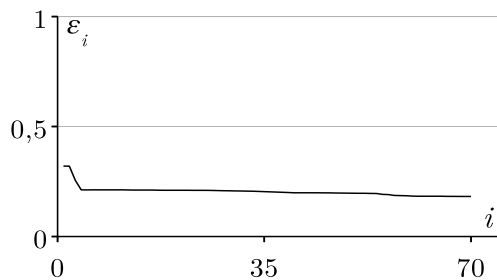


Рис. 2.5.9. Значения относительной погрешности при восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 2.5.1. Результаты восстановления $\xi^{(1)}$

i	15	30	45	60
$J(\xi_i)$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$3.3 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$7.0 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
ε_i	$5.9 \cdot 10^{-1}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.5.2. Результаты восстановления $\xi^{(2)}$

i	1	3	5
$J(\xi_i)$	$6.2 \cdot 10^{-6}$	$4.4 \cdot 10^{-8}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(2)}\ $	$8 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$2.7 \cdot 10^{-1}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.5.3. Результаты восстановления $\xi^{(3)}$

i	2	25	70
$J(\xi_i)$	$7.9 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$	$9.1 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(3)}\ $	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$3.2 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$1.82 \cdot 10^{-1}$

2.6. Метод квазиобращения решения обратной задачи

Рассмотрим метод решения поставленной обратной граничной задачи на основе метода квазиобращения. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу, в которой модель движения жидкости включает в себя регуляризованное уравнение теплового баланса

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \nabla p_\alpha - Ra T_\alpha \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.6.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\Delta T_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \nabla T_\alpha + \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.6.2)$$

при этом граничные условия для искоемых функций остаются прежними, т. е. для искоемых функций \mathbf{u}_α и T_α рассматриваются граничные условия (2.3.4)–(2.3.6). Ожидается, что вспомогательная задача будет устойчивой при всех достаточно малых $\alpha > 0$. Теоретически установить сходимость $T_\alpha(\cdot, 0) \rightarrow T(\cdot, 0) = v(\cdot)$ при $\alpha \rightarrow 0$ довольно трудно. Проведем соответствующие вычислительные эксперименты, которые позволят оценить реальную обусловленность предлагаемого метода численного решения задачи.

Пусть далее при численном моделировании Ω является прямоугольной областью (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (2.5.24)–(2.5.30). Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдается) поток (2.5.31).

Обратную задачу (2.5.24) – (2.5.27), (2.5.29) – (2.5.31) можно рассматривать как эволюционную задачу по пространственной переменной x_2 . Переобозначим переменные в уравнении (2.5.26): эволюционную переменную обозначим через t (аналог времени), $t = l_2 - x_2$, и пусть $x = x_1$. Тогда, если ввести обозначения $l = l_1$, $\vartheta = l_2$, $u^{(1)} = u_1$, $u^{(2)} = u_2$, то уравнение (2.5.26)

перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + u^{(2)} \frac{\partial T}{\partial t} = u^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < t < \vartheta, \quad 0 < x < l.$$

Возмущенное уравнение (2.6.2) в новых переменных будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} + u_\alpha^{(2)} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x^2 \partial t^2} \\ + u_\alpha^{(1)} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2}, \quad 0 < t < \vartheta, \quad 0 < x < l. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Это уравнение дополняется начальными и граничными условиями, вытекающими из (2.5.29) – (2.5.31)

$$T_\alpha(x, 0) = 0, \quad k(x, 0) \frac{\partial T_\alpha(x, 0)}{\partial t} = -\varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.6.4)$$

$$\frac{\partial T_\alpha(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_\alpha(l, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < \vartheta. \quad (2.6.5)$$

Для нахождения приближенного решения $\{\mathbf{u}_\alpha, T_\alpha\}$ обратной задачи начально-краевая задача (2.6.3) – (2.6.5) дополняется краевой задачей для определения поля скоростей, выраженной в переменных «функция тока, вихрь скорости»

$$-\Delta \eta_\alpha = \text{Ra} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_1}, \quad -\Delta \psi_\alpha = \eta_\alpha, \quad (2.6.6)$$

$$\psi_\alpha|_\Gamma = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial n} \right|_\Gamma = 0, \quad (2.6.7)$$

$$u_\alpha^{(1)} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_2}, \quad u_\alpha^{(2)} = -\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_1}, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_2}. \quad (2.6.8)$$

Для численного решения задачи (2.6.3)–(2.6.8) в области Ω задавалась равномерная расчетная сетка Ω_h . Итоговая

конечно-разностная аппроксимация уравнения (2.6.3) записывается в следующем виде (индексы α у T для сокращения записи опущены)

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\tau^2} + u_{i,j}^{(2)} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\tau} - \\
& - \frac{\alpha}{\tau^2 h^2} \left(T_{i-1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j-1} \right) + \frac{2\alpha}{\tau^2 h^2} \left(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + \right. \\
& \left. + T_{i+1,j} \right) - \frac{\alpha}{\tau^2 h^2} \left(T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1} \right) = \\
& = - \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(1 + 0.5 |u_{i,j}^{(1)}| h) h^2} + \frac{|u_{i,j}^{(1)}|}{h} T_{i,j} + \frac{u_{i,j}^{(1)} - |u_{i,j}^{(1)}|}{2h} T_{i+1,j} - \\
& - \frac{u_{i,j}^{(1)} + |u_{i,j}^{(1)}|}{2h} T_{i-1,j}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.6.9)
\end{aligned}$$

На каждом слое j разностное уравнение (2.6.9) решалось методом трехдиагональной прогонки. Для определения значений искомой функции при $j \in \{0, 1\}$ и $i \in \{0, N\}$ использовалась стандартная аппроксимация граничных условий (2.6.4), (2.6.5) [67]. Краевая задача (2.6.6)–(2.6.8) для определения поля скоростей аппроксимируется аналогично (2.5.41) – (2.5.43).

Опишем кратко схему численного решения поставленной обратной задачи методом квазиобращения. Для решения возмущенной краевой задачи организуем итерационный процесс, в котором это решение будет находиться методом установления, т. е. в результате стабилизации этого итерационного процесса. Зададим сначала некоторое начальное приближение для поля скоростей \mathbf{u}_α (например, положим $\mathbf{u}_\alpha = 0$). На каждой итерации при фиксированном α последовательно выполняются следующие шаги:

1. Находим температуру T_α в результате решения задачи (2.6.3) – (2.6.5) при некотором уже известном приближении вектора скорости \mathbf{u}_α и подставляем T_α в задачу (2.6.6)–(2.6.8).

2. Находим новое приближение вектора скорости \mathbf{u}_α в результате решения задачи (2.6.6)–(2.6.8) при уже найденном на предыдущем шаге приближении температуры T_α .

В итерационном процессе последовательно выполняются шаги 1 и 2. Вычисления завершаются при установлении организованного итерационного процесса. След $T_\alpha(\cdot, 0)$ компоненты T_α установившегося решения принимается за приближение к искомому граничному режиму.

Выбор параметра регуляризации осуществляется описанным в параграфе 1.6 квазиоптимальным методом.

При формировании последовательности $\{\alpha_s\}$ для выбора квазиоптимального параметра регуляризации в методе квазиобращения использовались параметры $\alpha_0 = 0.01$, $b = 0.75$, $S = 20$.

Численное моделирование проводилось на равномерной сетке 20×20 при фиксированных параметрах (2.5.40).

На рисунках 2.6.1–2.6.3 представлены результаты восстановления граничных режимов (2.5.49)–(2.5.50):

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках).

В таблице (2.6.1) представлены результаты восстановления граничных режимов.

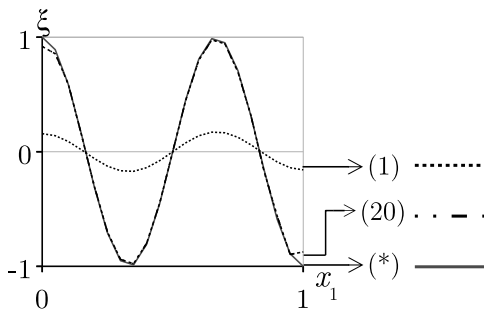


Рис. 2.6.1. Восстановление гладкого граничного режима

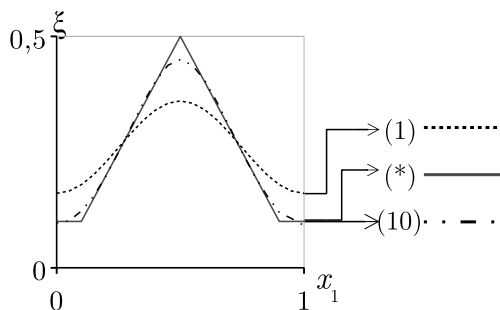


Рис. 2.6.2. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

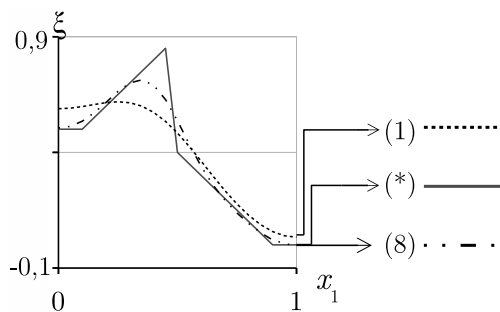


Рис. 2.6.3. Восстановление разрывного граничного режима

Таблица 2.6.1. Результаты восстановления граничных режимов

режим	α	ε
$\xi^{(1)}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-2}$
$\xi^{(2)}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-2}$
$\xi^{(3)}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$

2.7. Метод Ньютона–Канторовича решения обратной задачи

Нахождение неизвестного теплового режима ξ на Γ_2 в обратной задаче (2.3.1)–(2.3.6) можно свести к решению соответствующего нелинейного операторного уравнения (2.3.16). Действительно, рассмотрим задачу

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.2)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.7.4)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.7.5)$$

$$T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.7.6)$$

Пусть на границе Γ_1 наблюдается поток

$$\varphi = k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1}. \quad (2.7.7)$$

Рассмотрим нелинейный оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1),$$

где T — решение краевой задачи (2.7.1)–(2.7.6). Тогда обратная задача (2.7.1)–(2.7.5), (2.7.7) сводится к решению нелинейного операторного уравнения

$$A \xi = \varphi. \quad (2.7.8)$$

Для решения этого операторного уравнения, как и в параграфе 1.7, предлагается модифицировать метод Ньютона–Канторовича [34, с. 470], [19, с. 71]

$$\xi_{i+1} = \xi_i - [A'(\xi_i)]^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, \dots,$$

введением параметра регуляризации α_i и демпфирующего множителя β_i . Итерационный процесс для модифицированного метода Ньютона–Канторовича будет осуществляться по формуле

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, \dots$$

Для реализации этого итерационного процесса требуется предварительно найти производную Фреше A' оператора A . Выполним следующие вспомогательные преобразования. Фиксируем точку $\xi \in L_2(\Gamma_2)$ и дадим ей приращение $\zeta \in W_2^2(\Gamma_2) \subset L_2(\Gamma_2)$. Пусть $T = T_{\xi+\zeta} - T_\xi$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\xi+\zeta} - \mathbf{u}_\xi$, $p = p_{\xi+\zeta} - p_\xi$, где $(T_\xi, \mathbf{u}_\xi, p_\xi)$ и $(T_{\xi+\zeta}, \mathbf{u}_{\xi+\zeta}, p_{\xi+\zeta})$ — решения краевой задачи (2.7.1)–(2.7.6) при граничных условиях (2.7.6) вида $T|_{\Gamma_2} = \xi$ и $T|_{\Gamma_2} = \xi + \zeta$ соответственно. Находим приращение значения оператора в точке ξ :

$$A(\xi + \zeta) - A(\xi) = k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T — удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div} (k \nabla T) &= (\mathbf{u}_\xi, \nabla T) + \\ &+ (\mathbf{u}, \nabla T_\xi) + (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ T &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ T &= \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Слагаемое $(\mathbf{u}, \nabla T)$ в уравнении (2.7.9) доставляет приращение значению оператора A в точке ξ величину более высокого порядка малости, чем $\|\zeta\|_{W_2^2(\Gamma_2)}$. Отбрасывая это слагаемое в

уравнении (2.7.9), находим линейную часть приращения значения оператора и находим, что значение производной Фреше A' в точке ξ на элементе ζ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)\zeta = k \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_ζ — составляющая решения $(T_\zeta, \mathbf{u}_\zeta, p_\zeta)$ краевой задачи

$$\Delta \mathbf{u}_\zeta = \nabla p_\zeta - Ra T_\zeta \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.11)$$

$$LT \equiv \operatorname{div}(k \nabla T_\zeta) - (\mathbf{u}_\xi, \nabla T_\zeta) - \\ - (\mathbf{u}_\zeta, \nabla T_\xi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{u}_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.7.13)$$

$$T_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.7.14)$$

$$T_\zeta = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.7.15)$$

Оператор $[A'(\xi)]_\alpha^{-1}$ действует следующим образом

$$[A'(\xi)]_\alpha^{-1}(\chi) = T_\alpha \Big|_{\Gamma_2},$$

где T_α — решение вспомогательной краевой задачи, в которой модель движения жидкости включает в себя регуляризованное уравнение теплового баланса

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \nabla p_\alpha - Ra T_\alpha \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.16)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.17)$$

$$LT_\alpha = \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.18)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.7.19)$$

$$T_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.7.20)$$

$$k \frac{\partial T_\alpha}{\partial \mathbf{n}} = \chi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (2.7.21)$$

Параметр α_i выбирается описанным в параграфе 1.6 способом. Демпфирующий множитель β_i определяется в результате решения задачи одномерной минимизации

$$\| A(\xi_i - \beta [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \|_{L_2(\Gamma_2)} \rightarrow \min : \beta > 0.$$

Пусть далее при численном моделировании в качестве Ω рассматривается прямоугольная область (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (2.5.24)–(2.5.30).

Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдается) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.7.22)$$

Оператор A определяется следующим образом

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_3} \in L_2(\Gamma_3).$$

Задача (2.7.16)–(2.7.21), необходимая для нахождения $[A'(\xi)]_\alpha^{-1}(\chi)$, где $\chi = A(\xi) - \varphi$, запишется в данном случае в виде

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \nabla p_\alpha - Ra T_\alpha \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.23)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.24)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T_\alpha) = (\mathbf{u}_\xi, \nabla T_\alpha) + (\mathbf{u}_\alpha, \nabla T_\xi) +$$

$$+ \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7.25)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.7.26)$$

$$T_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.7.27)$$

$$k \frac{\partial T_\alpha}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (2.7.28)$$

$$k \frac{\partial T_\alpha}{\partial \mathbf{n}} = \chi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (2.7.29)$$

Кратко опишем алгоритм численного решения операторного уравнения (2.7.8) модифицированным методом Ньютона–Канторовича. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Известное $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и находим решение T_ξ этой краевой задачи.

2. Находим значение регуляризирующего параметра $\alpha = \alpha_i$.

3. По T_ξ находим

$$\chi = k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

подставляем эту функцию во вспомогательную задачу (2.7.23)–(2.7.29) и находим

$$[A'(\xi)]_{\alpha_i}^{-1}(\chi).$$

4. Вычисляем значение демпфирующего множителя $\beta = \beta_i$ и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$\|A(\xi_i) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} < \varepsilon_0,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры $k = 1$, $\text{Ra} = 1$, $l_1 = l_2 = 1$. В области Ω для численного решения прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и вспомогательной задачи (2.7.23)–(2.7.29) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{(l, h_1, j, h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}\},$$

где $h_1 = 1/N_1$ и $h_2 = 1/N_2$ — шаги сетки.

Прямая и вспомогательная задачи решаются методами, описанными в параграфах 2.5 и 2.6.

Для ускорения счета при численном решении задачи (2.7.23)–(2.7.29) использовался постоянный параметр $\alpha = 0.05$.

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 . Рассчитывались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов (2.5.48)–(2.5.50).

На рисунках 2.7.1–2.7.9 представлены следующие сведения о вычислительных экспериментах:

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений невязки $\|A(\xi_i^{(j)}) - \varphi\|$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_i^{(j)} = \|\xi_i^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}$, $j = 1, 2, 3$.

В таблицах (2.7.1)–(2.7.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

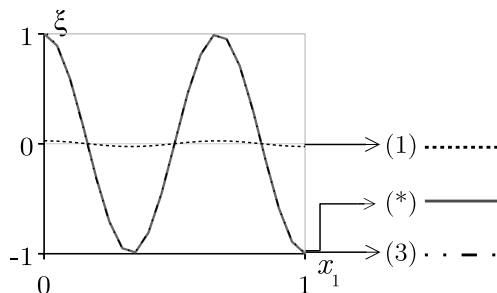


Рис. 2.7.1. Восстановление гладкого граничного режима

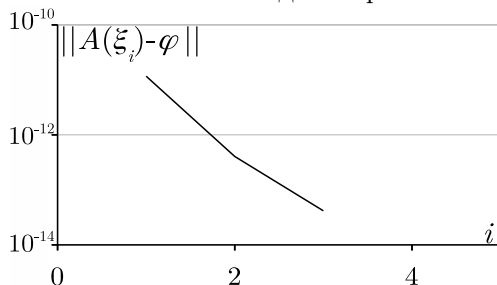


Рис. 2.7.2. Значения невязки при восстановлении гладкого граничного режима

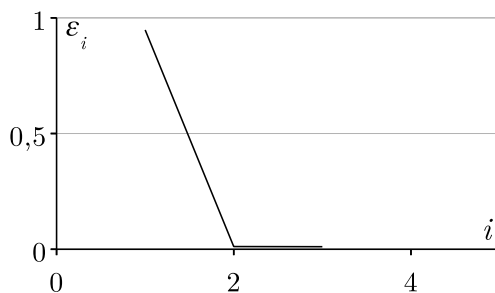


Рис. 2.7.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

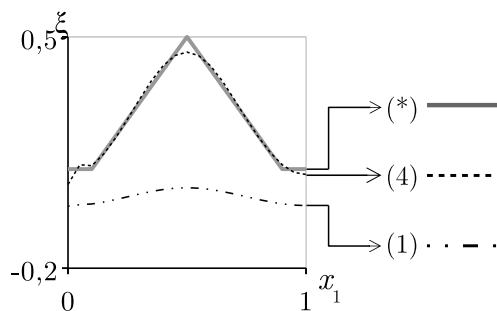


Рис. 2.7.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

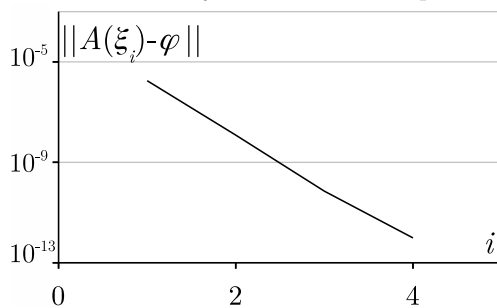


Рис. 2.7.5. Значения невязки при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

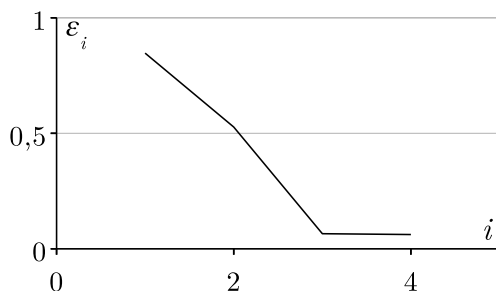


Рис. 2.7.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

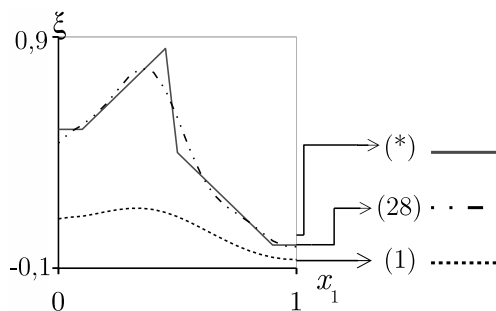


Рис. 2.7.7. Восстановление разрывного граничного режима

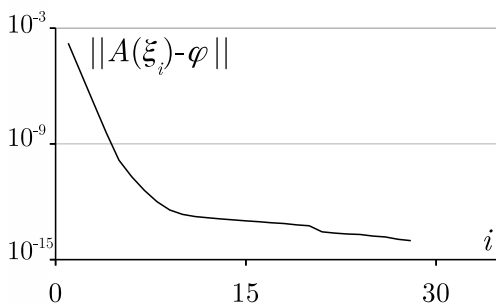


Рис. 2.7.8. Значения невязки при восстановлении разрывного граничного режима

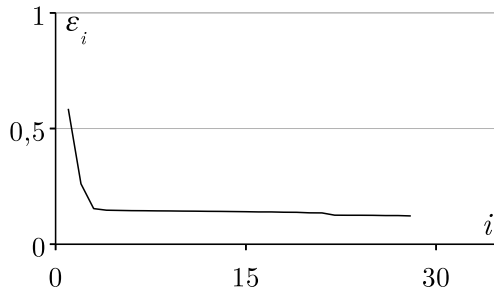


Рис. 2.7.9. Значения относительной погрешности при
восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 2.7.1. Восстановление режима $\xi^{(1)}$

i	1	3
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-16}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$7 \cdot 10^{-1}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$
ε_i	$9.4 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.7.2. Восстановление режима $\xi^{(2)}$

i	1	2	3	4
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$9.8 \cdot 10^{-13}$
$\ \xi_i - \xi^{(2)}\ $	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$8.5 \cdot 10^{-1}$	$5.3 \cdot 10^{-1}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.7.3. Восстановление режима $\xi^{(3)}$

i	1	14	28
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$9.6 \cdot 10^{-15}$
$\ \xi_i - \xi^{(3)}\ $	$2.8 \cdot 10^{-1}$	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$5.9 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$5.8 \cdot 10^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$

2.8. Метод Ландвебера решения обратной задачи

В этом параграфе, как и в параграфе 1.8, предлагается для решения обратной задачи (2.3.1)–(2.3.6) модифицировать классический метод Ландвебера (или метод простой итерации) [19, 26].

Рассмотрим прямую задачу (2.7.1)–(2.7.6). Пусть на границе Γ_1 наблюдается поток (2.7.7). Тогда решение соответствующей обратной задачи (2.7.1)–(2.7.5), (2.7.7) может быть сведено к решению нелинейного операторного уравнения (2.7.8).

Для решения операторного уравнения (2.7.8) модифицируем метод Ландвебера

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \alpha A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) ,$$

вводя регуляризующую добавку $\beta_i \xi_i$ и выбирая подходящее значение параметра α на каждой итерации. Для модифицированного таким образом метода Ландвебера итерационный процесс строится по следующим формулам

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta_i \xi_i .$$

При реализации этого итерационного процесса необходимо знать как действует оператор A'^* , сопряженный к A' . Значение производной Фреше A' оператора A в точке $\xi \in L_2(\Gamma_1)$ на элементе $\zeta \in L_2(\Gamma_2)$ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)\zeta = k \left. \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_1} ,$$

где T_ζ — составляющая решения $(T_\zeta, \mathbf{u}_\zeta, p_\zeta)$ краевой задачи (2.7.10)–(2.7.15). Для того, чтобы найти значение оператора A'^* в точке $\xi \in L_2(\Gamma_1)$ на элементе $h \in L_2(\Gamma_1)$ необходимо получить равенство вида

$$\langle A'(\xi)\zeta, h \rangle_{L_2(\Gamma_1)} = \langle \zeta, \Psi(\xi; h) \rangle_{L_2(\Gamma_2)} , \quad (2.8.1)$$

где элемент $\Psi(\xi; h)$ будет значением $A'(\xi)^* h$. Выполним ряд вспомогательных преобразований. Для решения краевой задачи (2.7.10)–(2.7.15) $(T_\zeta, \mathbf{u}_\zeta, p_\zeta)$ и для любой тройки элементов $g \in W_2^2(\Omega)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $q \in W_2^1(\Omega)$, выполняются следующие интегральные равенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{z}, \mathbf{u}_\zeta) dx + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} z_i \cos(\mathbf{n}, x_j) d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} p_\zeta(\mathbf{z}, \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} p_\zeta \operatorname{div} \mathbf{z} dx - \int_{\Omega} Ra T_\zeta(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}) dx, \quad (2.8.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} T_\zeta \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}_\zeta, \nabla g) \right) dx + \int_{\Omega} T_\xi(\mathbf{u}_\zeta, \nabla g) dx = \\ & = \int_{\Gamma_2} \zeta k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} k \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} g d\Gamma, \quad (2.8.3) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_\zeta q dx = 0 = - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_\zeta, \nabla q) dx. \quad (2.8.4)$$

Потребуем, чтобы для функций \mathbf{z} и g выполнялись условия $\operatorname{div} \mathbf{z}|_{\Omega} = 0$, $\mathbf{z}|_{\Gamma} = 0$, $g|_{\Gamma_1} = h$, $g|_{\Gamma_2} = 0$. Учитывая эти условия, суммируем равенства (2.8.2)–(2.8.4) и перегруппируем части этих равенств так, чтобы получилось выражение вида

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{u}_\zeta, \mathbf{F}(g, \mathbf{z}, q)) dx + \int_{\Omega} T_\zeta \Phi(g, \mathbf{z}) dx = \\ & = \int_{\Gamma_2} \zeta k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\int_{\Omega} \left(\mathbf{u}_\zeta, \Delta \mathbf{z} - \nabla q + \nabla g T_\xi \right) dx +$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_{\zeta} \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}_{\xi}, \nabla g - Ra(\mathbf{e}_m, \mathbf{z})) \right) dx = \\ = \int_{\Gamma_2} \zeta k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T_{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma. \end{aligned}$$

Далее потребуем, чтобы

$$\Delta \mathbf{z} = \nabla q - \nabla g T_{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\operatorname{div} (k \nabla g) = -(\mathbf{u}_{\xi}, \nabla g) - Ra(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Таким образом, получаем выражение вида (2.8.1)

$$\int_{\Gamma_2} \zeta k \frac{\partial g_h}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T_{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma,$$

где g_h — составляющая решения (\mathbf{z}_h, g_h, q_h) краевой задачи

$$\Delta \mathbf{z} = \nabla q - \nabla g T_{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8.6)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla g) = -(\mathbf{u}_{\xi}, \nabla g) - Ra(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8.7)$$

$$\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.8.8)$$

$$g = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.8.9)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.8.10)$$

Из этого следует, что значение оператора A'^* в точке $\xi \in L_2(\Gamma_1)$ на элементе $h \in L_2(\Gamma_1)$ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)^* h = k \frac{\partial g_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2}.$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается одномерная задача минимизации:

$$\| A \left(\xi_i - \alpha A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) \right) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Параметр β_i определялся в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$\| A \left(\xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta \xi_i \right) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

Пусть далее при численном моделировании в качестве Ω рассматривается прямоугольная область (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (2.7.22)–(2.7.28). Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдаются) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Оператор A определяется следующим образом

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_3} \in L_2(\Gamma_3).$$

При так введенном операторе A вспомогательная краевая задача (2.8.5)–(2.8.10) примет вид

$$\Delta \mathbf{z} = \nabla q - \nabla g T_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8.12)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla g) = -(\mathbf{u}_\xi, \nabla g) - Ra(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8.13)$$

$$\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.8.14)$$

$$g = h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.8.15)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (2.8.16)$$

$$g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.8.17)$$

Опишем кратко алгоритм численного решения операторного уравнения (2.7.8) модифицированным методом Ландвебера. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Заданную или найденную на предыдущем шаге функцию $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (2.7.22)–(2.7.28) и находим решение (\mathbf{u}_ξ, T_ξ) этой краевой задачи.

2. Во вспомогательную задачу (2.8.11)–(2.8.17) подставляем $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\xi$ и

$$h = k \frac{\partial T_\xi(x_1, l_2)}{\partial x_2} - \varphi$$

и находим ее решение $(\mathbf{z}, g, q) = (\mathbf{z}_h, g_h, q_h)$.

3. По вычисленному $g = g_h$ находим величину

$$A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) .$$

4. Вычисляем значения параметров α_i, β_i и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$\|A(\xi_i) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} < \varepsilon_0 ,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры $k = 1$, $\text{Ra} = 1$, $l_1 = l_2 = 1$. В области Ω для численного решения прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и вспомогательной краевой задачи (2.8.11)–(2.8.17) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l h_1, j h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \} ,$$

где $h_1 = 1/N_1$, $h_2 = 1/N_2$. Вспомогательная краевая задача (2.8.11)–(2.8.17) решается аналогично прямой задаче (2.5.24)–(2.5.30) методом установления.

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 .

Рассчитывались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов (2.5.48)–(2.5.50).

На рисунках 2.8.1–2.8.9 представлены следующие сведения о вычислительных экспериментах:

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений невязки $\|A(\xi_i^{(j)}) - \varphi\|$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_i^{(j)} = \|\xi_i^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}$, $j = 1, 2, 3$.

В таблицах (2.8.1)–(2.8.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

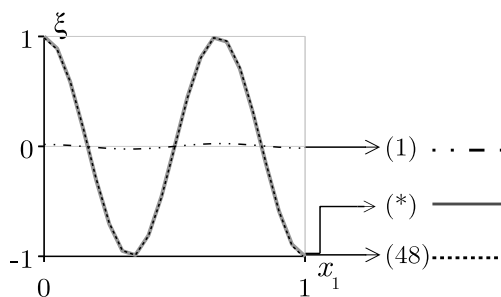


Рис. 2.8.1. Восстановление гладкого граничного режима

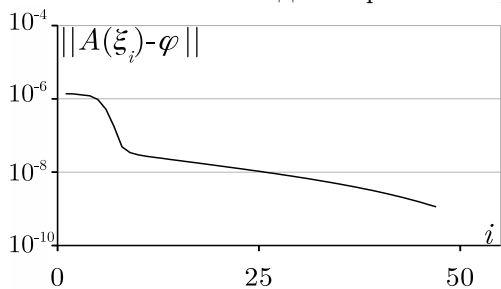


Рис. 2.8.2. Значения невязки при восстановлении гладкого граничного режима

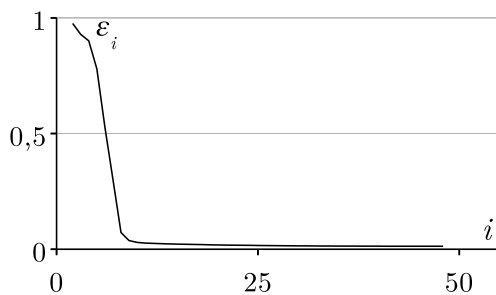


Рис. 2.8.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

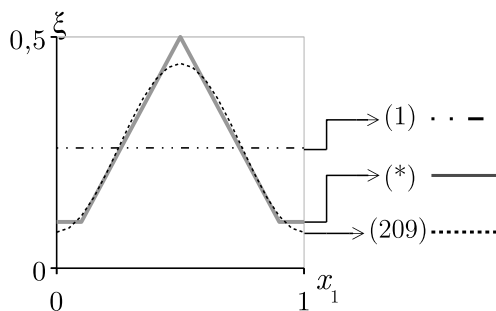


Рис. 2.8.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

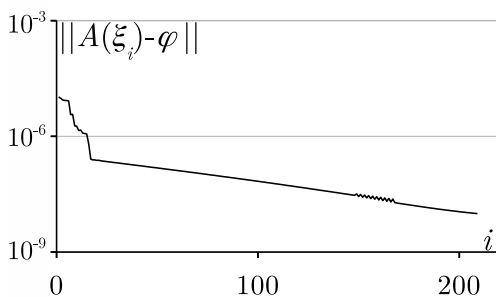


Рис. 2.8.5. Значения невязки при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

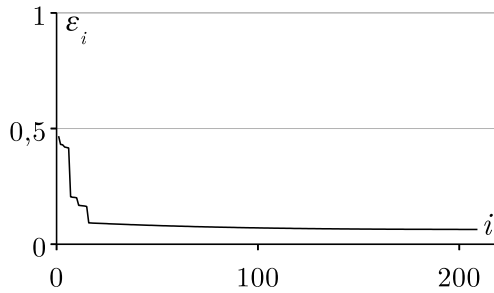


Рис. 2.8.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

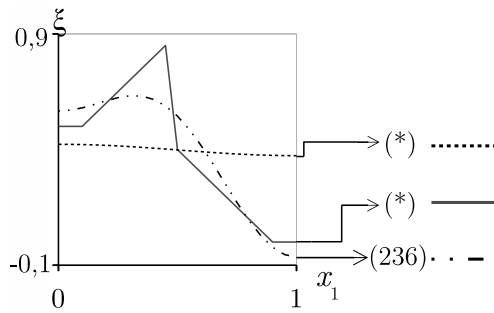


Рис. 2.8.7. Восстановление разрывного граничного режима

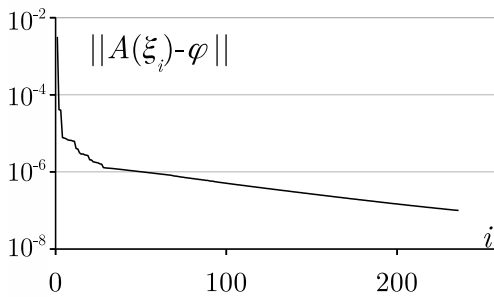


Рис. 2.8.8. Значения невязки при восстановлении разрывного граничного режима

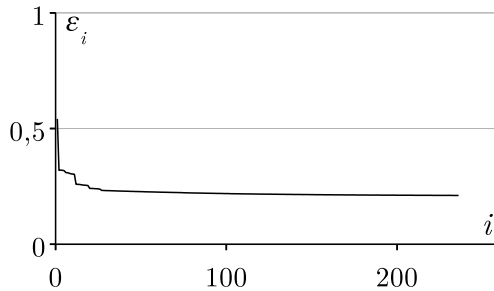


Рис. 2.8.9. Значения относительной погрешности при восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 2.8.1. Восстановление режима $\xi^{(1)}$

i	1	10	48
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-10}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$7.2 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-3}$
ε_i	$9.8 \cdot 10^{-1}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.8.2. Восстановление режима $\xi^{(2)}$

i	1	70	140	209
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$4.7 \cdot 10^{-1}$	$7.6 \cdot 10^{-1}$	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.8.3. Восстановление режима $\xi^{(3)}$

i	1	80	160	236
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$9.9 \cdot 10^{-8}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$2.6 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$
ε_i	$5.4 \cdot 10^{-1}$	$2.2 \cdot 10^{-1}$	$2.11 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$

2.9. Метод Левенберга-Марквардта решения обратной задачи

В этом параграфе предлагается для решения обратной задачи (2.3.1)–(2.3.6) модифицировать метод Левенберга–Марквардта [18, 19, 22].

Рассмотрим прямую задачу (2.7.1)–(2.7.6). Пусть на границе Γ_1 наблюдается поток (2.7.7). Тогда решение соответствующей обратной задачи (2.7.1)–(2.7.5), (2.7.7) может быть сведено к решению нелинейного операторного уравнения (2.7.8).

Для решения операторного уравнения (2.7.8) модифицируем метод Левенберга–Марквардта

$$\xi_{i+1} = \xi_i - [A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) + \alpha E]^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) ,$$

вводя демпфирующий множитель β_i и выбирая подходящее значение параметра α на каждой итерации. Для модифицированного таким образом метода Левенберга–Марквардта итерационный процесс строится по следующим формулам

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) + \alpha_i E]^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) .$$

Производная Фреше оператора A в точке ξ действует следующим образом

$$A'(\xi) \zeta = k \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} ,$$

где T_ζ — составляющая решения $(T_\zeta, \mathbf{u}_\zeta, p_\zeta)$ краевой задачи (2.7.10)–(2.7.15).

Оператор $A'(\xi)^*$ сопряженный к оператору $A'(\xi)$ действует следующим образом

$$A'(\xi)^* h = k \frac{\partial g_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} ,$$

где g_h — составляющая решения (g_h, \mathbf{z}_h) вспомогательной задачи (2.8.5)–(2.8.10).

Введем следующие обозначения

$$\eta_i = A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) ,$$

$$B = A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) .$$

Тогда итерационный процесс для модифицированного метода Левенберга–Марквардта перепишется в виде

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i (B + \alpha_i E)^{-1} \eta_i .$$

Для нахождения величины $\mu = [B + \alpha E]^{-1} \eta$ это равенство сначала переписывается в неявном виде $[B + \alpha E] \mu = \eta$ и для нахождения решения этого неявного уравнения строится внутренний итерационный процесс:

$$\mu_{j+1} = \eta - [B + (\alpha - 1) E] \mu_j .$$

На каждом шаге основного итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается задача одномерной минимизации

$$\| A(\xi_i - (B + \alpha E)^{-1} \eta_i) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0 .$$

Демпфирующий множитель β_i находится в результате решения задачи одномерной минимизации

$$\| A(\xi_i - \beta (B + \alpha_i E)^{-1} \eta_i) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0 .$$

Пусть далее при численном моделировании в качестве Ω рассматривается прямоугольная область (1.1.6)–(1.1.10). В области Ω будет рассматриваться прямая задача (2.5.24)–(2.5.30). Пусть граничный режим $T|_{\Gamma_1} = \xi$ неизвестен, а на границе Γ_3 замеряется (наблюдаются) поток

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \varphi , \quad x \in \Gamma_3 .$$

Оператор A определяется следующим образом

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_3} \in L_2(\Gamma_3).$$

При так введенном операторе A вспомогательная краевая задача (2.8.5)–(2.8.10) примет вид (2.8.11)–(2.8.17), краевая задача (2.7.10)–(2.7.15) запишется в виде

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.9.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.9.2)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}_\xi, \nabla T) + (\mathbf{u}, \nabla T_\xi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.9.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.9.4)$$

$$T = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2.9.5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (2.9.6)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.9.7)$$

Опишем кратко алгоритм численного решения операторного уравнения (2.7.8) модифицированным методом Левенберга–Марквардта. На каждой итерации последовательно выполняются следующие шаги.

1. Заданную или найденную на предыдущем шаге функцию $\xi = \xi_i$ подставляем в граничное условие прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и находим решение (\mathbf{u}_ξ, T_ξ) этой краевой задачи.

2. Во вспомогательную задачу (2.8.10)–(2.8.16) подставляем $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\xi$ и

$$h = k \frac{\partial T_\xi(x_1, l_2)}{\partial x_2} - \varphi$$

и находим ее решение $(\mathbf{z}, g, q) = (\mathbf{z}_h, g_h, q_h)$.

3. По вычисленному $g = g_h$ находим величину

$$\eta = A'(\xi_i)^* h.$$

4. Вычисляем значения параметров α_i , β_i и находим очередное приближение решения ξ_{i+1} .

Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия

$$\|A(\xi_i) - \varphi\| < \varepsilon_0,$$

где ε_0 — заранее заданное малое положительное число.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались параметры $k = 1$, $\text{Ra} = 1$, $l_1 = l_2 = 1$. В области Ω для численного решения прямой задачи (2.5.24)–(2.5.30) и задачи (2.9.1)–(2.9.7) задавалась расчетная сетка

$$\Omega_h = \{ (l, h_1, j, h_2) : l = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \},$$

где $h_1 = 1/N_1$, $h_2 = 1/N_2$.

Вычислительные эксперименты проводились на равномерной сетке 20×20 .

Рассчитывались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов (2.5.48)–(2.5.50).

На рисунках 2.9.1–2.9.9 представлены следующие сведения о вычислительных экспериментах:

- точный режим $\xi^{(j)} = \xi^{(j)}(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ (отмечен (*));
- промежуточные и конечные итерации $\xi_i^{(j)}(x_1)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ (номера итераций указаны в скобках);
- изменение значений невязки $\|A(\xi_i^{(j)}) - \varphi\|$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$;
- изменение значений относительной погрешности $\varepsilon_i^{(j)}$ в зависимости от номера итерации $i = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_i^{(j)} = \|\xi_i^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}$, $j = 1, 2, 3$.

В таблицах (2.9.1)–(2.9.3) представлены результаты восстановления граничных режимов.

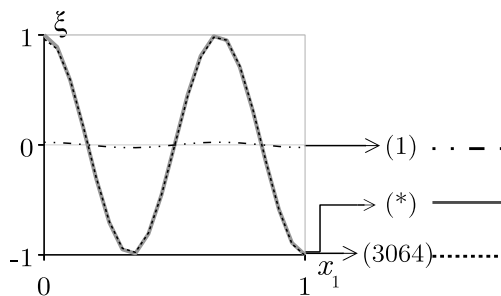


Рис. 2.9.1. Восстановление гладкого граничного режима

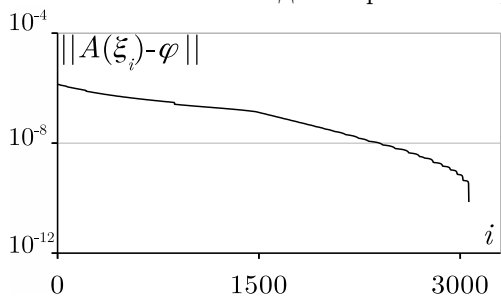


Рис. 2.9.2. Значения невязки при восстановлении гладкого граничного режима

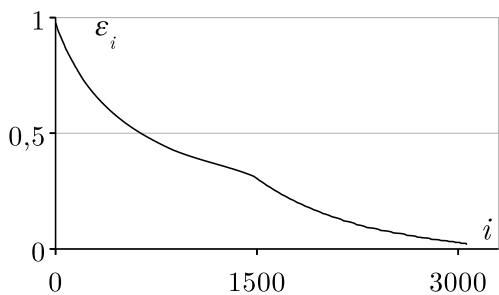


Рис. 2.9.3. Значения относительной погрешности при восстановлении гладкого режима

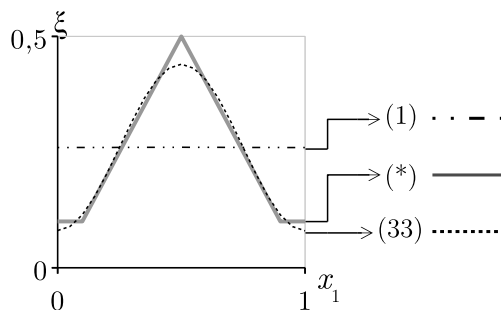


Рис. 2.9.4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

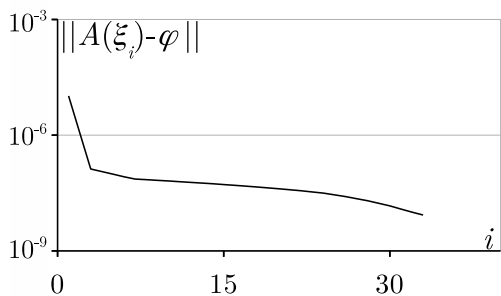


Рис. 2.9.5. Значения невязки при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

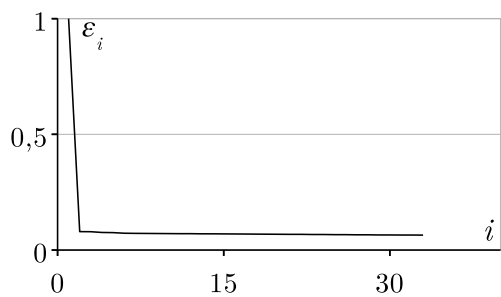


Рис. 2.9.6. Значения относительной погрешности при восстановлении кусочно-гладкого граничного режима

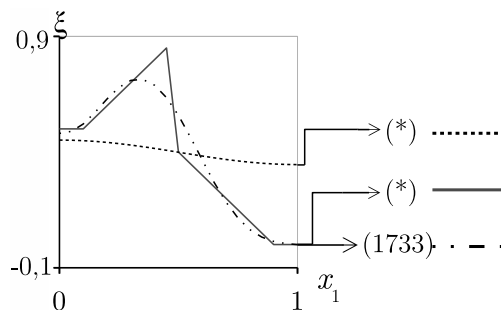


Рис. 2.9.7. Восстановление разрывного граничного режима

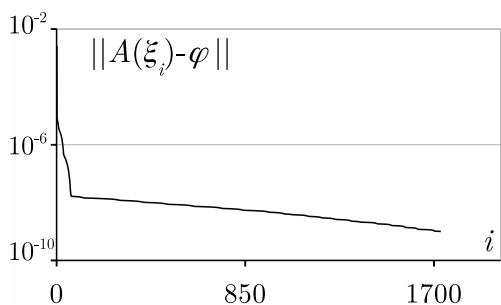


Рис. 2.9.8. Значения невязки при восстановлении разрывного граничного режима

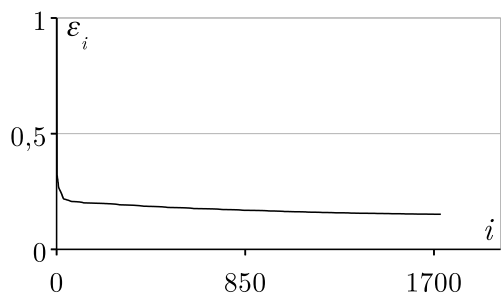


Рис. 2.9.9. Значения относительной погрешности при восстановлении разрывного граничного режима

Таблица 2.9.1. Восстановление режима $\xi^{(1)}$

i	1	500	1500	3064
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-11}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$7.2 \cdot 10^{-1}$	$4.1 \cdot 10^{-1}$	$2.3 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$9.7 \cdot 10^{-1}$	$5.5 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.9.2. Восстановление режима $\xi^{(2)}$

i	1	10	20	33
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$1 \cdot 10^{-5}$	$6.5 \cdot 10^{-8}$	$4.8 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$4.6 \cdot 10^{-1}$	$7.1 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2.9.3. Восстановление режима $\xi^{(3)}$

i	1	400	800	1733
$\ A(\xi_i) - \varphi\ $	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$9.9 \cdot 10^{-10}$
$\ \xi_i - \xi^{(1)}\ $	$4.8 \cdot 10^{-1}$	$9.1 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$2 \cdot 10^{-1}$	$1.86 \cdot 10^{-1}$	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом разделе приведены некоторые определения и формулы, которые использовались в данной книге.

Обобщенная производная [70, с. 339].

Пусть D^α — дифференциальный оператор

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное открытое связное множество и $\text{mes } \partial\Omega \neq 0$. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ суммируемы по любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω и для любой финитной α раз непрерывно дифференцируемой функции $\psi(x)$ выполняется соотношение

$$\int_{\Omega} \chi(x) \psi(x) d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi(x) D^\alpha \psi(x) d\Omega,$$

тогда функция $\chi(x)$ называется *обобщенной производной* $D^\alpha \varphi$ функции φ в Ω .

Пространства [50, с. 27].

Пространство $L_p(\Omega)$ — банахово пространство всех измеримых и суммируемых по Лебегу на Ω со степенью p функций с нормой

$$\|y\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |y(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ — пространство всех функций из $L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные до l -го порядка включительно из пространства $L_p(\Omega)$ с нормой

$$\|y\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{k=0}^l \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^k y}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n} \right|^p dx \right)^{1/p},$$

где $\sum_{(k)}$ обозначает суммирование всех возможных производных порядка k , $1 \leq p < \infty$, $l \in \mathbb{N}$.

Формула интегрирования по частям [50, с. 70].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — строго липшицева область с границей $\Gamma = \partial\Omega$, функции $u \in W_p^1(\Omega)$, $v \in W_l^1(\Omega)$, где l и p удовлетворяют одному из условий:

- 1) $\frac{1}{l} + \frac{1}{p} \leq 1 + \frac{1}{m}$, если $l \in (1, m)$, $p \in (1, m)$;
- 2) $\frac{1}{l} + \frac{1}{p} < 1 + \frac{1}{m}$, если $l > 1$, $p \geq 1$ или $p > 1$, $l \geq 1$,

тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} u v \cos(\mathbf{n}, x_i) d\Gamma.$$

Формула Гаусса–Остроградского [26, с. 428].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с регулярной границей, тогда для каждой вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ с $u_i \in C^1(\Omega)$ справедлива формула Гаусса–Остроградского:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^m u_i n_i d\Gamma,$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω .

Первая формула Грина [21, с. 328].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $v(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $w(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, тогда справедлива *первая формула Грина*

$$\int_{\Omega} v Lw d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m k \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} k v \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} q v w d\Omega,$$

где $Lw = -\operatorname{div}(k \nabla w) + q w$.

Вторая формула Грина [21, с. 329].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ и $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, тогда

справедлива вторая формула Грина

$$\int_{\Omega} (v Lw - w Lv) d\Omega = \int_{\Gamma} k \left(w \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma.$$

Сильный дифференциал (дифференциал Фреше) [34, с. 481].

Пусть X и Y — два нормированных пространства и f — отображение, действующее из X в Y и определенное на некотором открытом подмножестве $O \subseteq X$. Отображение f называется *дифференцируемым* в точке $x \in O$, если существует такой ограниченный линейный оператор $L_x \in \mathcal{L}(X; Y)$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $\|h\| < \delta$ следует неравенство

$$\|f(x+h) - f(x) - L_x h\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Выражение $L_x h$ называется *сильным дифференциалом* (или *дифференциалом Фреше*) отображения f в точке x . Сам линейный оператор L_x называется *сильной производной* (или *производной Фреше*) отображения f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Слабый дифференциал (дифференциал Гато) [34, с. 482].

Пусть f есть отображение, действующее из X в Y . *Слабым дифференциалом* (или *дифференциалом Гато*) отображения f в точке x при приращении h называется предел

$$Df(x, h) = \frac{d}{dt} f(x + th)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

где сходимость понимается как сходимость по норме в пространстве Y . Слабый дифференциал $Df(x, h)$ может не быть линейным по h . Если же такая линейность имеет место, то есть

$$Df(x, h) = A(x)h,$$

где $A(x)$ — ограниченный линейный оператор, то этот оператор называется *слабой производной* (или *производной Гато*).

Список литературы

1. *Агмон Ш., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 206 с.
2. *Агранович М.С., Вилиж М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. Вып. 3. С. 53–161.
3. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
4. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.
5. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции // Вестник НГУ. Сер. матем., механ. и информ. 2006. Т. 6, № 2. С. 6–32.
6. *Алексеев Г.В.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 6. С. 1055–1076.
7. *Алексеев Г.В., Вахитов И.С., Соболева О.В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52, № 12. С. 2190–2205.
8. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* О задаче идентификации для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49, № 10. С. 1796–1811.
9. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
10. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
11. *Барр Р., Спэк М.* Решения обратной задачи, выраженные непосредственно в форме потенциала. М.: Медицина, 1979. 341 с.

12. *Бимуратов С.Ш., Кабанихин С.И.* Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона–Канторовича // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32, № 12. С. 1900–1915.
13. *Булеев Н.И.* Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989. 344 с.
14. *Бокерия Л.А., Шакин В.В., Мирски Г.В.* Численные методы электрофизиологической оценки состояния сердца. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 44 с.
15. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
16. *Васильев О.В., Надежкина Н.В.* Об одном классе обратных задач оптимального управления // Известия вузов. Математика. 1996. № 3. С. 14–20.
17. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ Наука, 1993. 262 с.
18. *Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф.* Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2013. Т. 6, № 3. С. 26–37.
19. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2006. 210 с.
20. *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во Тартусского университета, 1982. 107 с.
21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 512 с.
22. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
23. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 206 с.

24. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
25. *Исмаил-Заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А.* Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // ЖВМиМФ. 2001. Т. 41, № 9. С. 1399–1415.
26. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
27. *Кабанихин С.И., Гасанов А., Пененко А.В.* Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. Т. 11, № 1. С. 41–51.
28. *Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Шишленин М.А.* О численном решении обратной задачи термоакустики // Сиб. журн. вычисл. матем. 2013. Т. 16, № 1. С. 39–44.
29. *Кабанихин С.И., Черемисин А.Н., Шишленин М.А.* Обратная задача определения обводненности и дебита в вертикальной фонтанной скважине // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 3. С. 31–36.
30. *Кабанихин С.И., Шишленин М.А.* Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 147–164.
31. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
32. *Ковтунов Д.А.* Разрешимость стационарной задачи тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 74–85.
33. *Ковтунов Д.А.* Моделирование обратных граничных задач стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Ковтунов Дмитрий Александрович. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2010. 160 с.
34. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

35. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 2. С. 3–76.
36. *Короткий А.И.* Разрешимость в слабом смысле одной краевой задачи, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 121–132.
37. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 76–101.
38. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное управление тепловой конвекцией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 103–112.
39. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* О разрешимости стационарных задач естественной тепловой конвекции вязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 61–73.
40. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Восстановление граничных управлений в модели реакции-конвекции-диффузии // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 85–92.
41. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Восстановление граничных управлений в модели реакции-конвекции-диффузии // Теория управления и математическое моделирование : Всеросс. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (Россия, Ижевск, 9–11 июня 2015): тез. докл. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2015. С. 259–261.
42. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Восстановление граничных управлений по граничным наблюдениям в системах реакции-конвекции-диффузии // Тезисы докладов Международной конференции "Динамика систем и процессы управления"(SDCP-2014), посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Россия,

- Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.). Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2014. С. 113–115.
43. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Прямые и обратные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №3. С. 91–106.
 44. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Реконструкция граничных режимов в модели реакции-конвекции-диффузии // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2013. Т. 58, № 3. С. 146–149.
 45. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Численное исследование обратных граничных задач для моделей тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тезисы докладов Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2011 (Россия, Новосибирск, Академгородок, 29 июня – 1 июля 2011 г.). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2011. С. 105.
 46. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
 47. *Лаврентьев М.М., Романов В.П., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 68 с.
 48. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
 49. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
 50. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
 51. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ФМ, 1961. 203 с.
 52. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 280 с.

53. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
54. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
55. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
56. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
57. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
58. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980. 276 с.
59. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
60. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: КомКнига, 2007. 197 с.
61. *Никольский С.М.* Курс математического анализа : в 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1990. 464 с.
62. *Пененко А.В.* О решении обратной коэффициентной задачи теплопроводности методом проекции градиента // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Вып. 7. С. 178–198. <http://semr.math.nsc.ru/v7/1-394.pdf>.
63. *Пененко В.В.* Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. 314 с.
64. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
65. *Романов В.Г.* Двумерная обратная задача для интегродифференциального уравнения электродинамики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 273–280.
66. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
67. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплотопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

68. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 478 с.
69. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
70. Смирнов В.И. Курс высшей математики : в 5 т. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
71. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
72. Соболева О.В. Обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Дальневосточный математический журн.. 2010. Т. 10. Вып. 2. С. 170–184.
73. Стародубцева Ю.В. Итерационные методы решения обратной граничной задачи для модели тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тезисы докладов II Российско-Монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Россия – Монголия, Иркутск – Ханка, 25 июня – 1 июля 2013 г.). Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. С. 56.
74. Стародубцева Ю.В. Обратные граничные задачи для модели реакции-конвекции-диффузии // Тезисы докладов III Всероссийской конференции "Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях"(Россия, Иркутск, 23–26 июня 2013 г.). Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН. 2013. С. 54.
75. Стародубцева Ю.В. Обратная граничная задача для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тезисы докладов Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной памяти В.К. Иванова (Россия, Челябинск, 10–14 ноября

- 2014 г.). Челябинск: Издательство Южно-Уральского государственного университета. 2014. С. 151.
76. *Стародубцева Ю.В.* Прямые и обратные граничные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2692–2693.
77. *Стародубцева Ю.В.* Реконструкция граничных режимов в обратных задачах тепловой конвекции // Материалы IV Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование"(МПМО'11) (Россия, Бурятия, Улан-Удэ, 27 июня – 1 июля 2011 г.). Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ (Восточно-Сибирский государственный технологический университет). 2011. С. 154–157.
78. *Стародубцева Ю.В.* Решение обратной граничной задачи для модели высоковязкой жидкости итерационными методами // Тезисы докладов XIV Международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование"(Россия, Саров, 1–5 октября 2012 г.). Саров: ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2012. С. 146.
79. *Стародубцева Ю.В.* Решение обратной граничной задачи для модели высоковязкой жидкости итерационными методами // Труды XIV Международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование"(Россия, Саров, 1–5 октября 2012 г.) под редакцией Р.М. Шагалиева. Саров: ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2013. С. 530–538.
80. *Стародубцева Ю.В.* Численное моделирование задачи реконструкции граничных режимов // Тезисы докладов Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной памяти В.К. Иванова (Россия, Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 г.). Екатеринбург: Издательство Уральского федерального университета. 2011. С. 171–172.
81. *Стародубцева Ю.В.* Численное моделирование обратной граничной задачи // Тезисы докладов IV Международ-

- ной молодежной научной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректные задачи"(Россия, Новосибирск, Академгородок, 5–15 августа 2012 г.). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН. 2012. С. 115.
82. *Стародубцева Ю.В.* Численное моделирование обратной граничной задачи для модели вязкой среды модифицированными методами Ньютона–Конторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта // Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 52, № 2. С. 14–18.
83. *Стародубцева Ю.В.* Численное решение обратной граничной задачи регуляризованным методом Левенберга–Марквардта // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 2. С. 212–215.
84. *Стародубцева Ю.В.* Численное моделирование обратной граничной задачи стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тезисы докладов Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Россия, Новосибирск, Академгородок, 5–12 августа 2012 г.). Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2012. С. 239.
85. *Стародубцева Ю.В.* Численное моделирование решения обратной граничной задачи тепловой конвекции методами Ландвебера и Левенберга–Марквардта // Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции молодых исследователей и VI Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 10–16 сентября 2012 г.). Екатеринбург: УрО РАН. 2012. С. 71–72.
86. *Стародубцева Ю. В.* Численное моделирование обратной граничной задачи для модели вязкой среды итерационными методами // Информационные технологии моделирования и управления. 2013. № 2 (80). С. 115–122.

87. *Стародубцева Ю.В.* Численное моделирование обратной граничной задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии методом квазиобращения // Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции молодых исследователей и VII Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 15–20 сентября 2014 г.). Екатеринбург: УрО РАН. 2014. С. 53–54.
88. *Стародубцева Ю.В., Короткий А.И.* Восстановление граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции молодых исследователей и V Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 13–18 сентября 2010 г.). Екатеринбург: УрО РАН. 2010. С. 77–78.
89. *Стародубцева Ю.В., Короткий А.И.* Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Материалы конференции "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ", посвященной 50-летию кафедры вычислительной математики и математикомеханического факультета Уральского государственного университета им. А.М. Горького (Екатеринбург, 21–22 апреля 2010 г.). Екатеринбург: Изд-во УрГУ. 2010. С. 95–101.
90. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 400 с.
91. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 284 с.
92. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 463–473.

93. *Цымбал В.П.* Математическое моделирование сложных систем в металлургии. Кемерово: Кузбассвуиздат, 2006. 431 с.
94. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. М.: Наука, 1969. 534 с.
95. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 237 с.
96. *Япарова Н.М.* Численное моделирование решений обратной граничной задачи теплопроводности // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2013. Т. 6. Вып. 3. С. 112–124.
97. *Adams R.A.* Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 265 p.
98. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover, 1981. 654 p.
99. *Floudas Ch.A., Pardalos P.M.* Encyclopedia of optimization. New York: Springer, 2009. 4626 p.
100. *Gilbert J.Ch., Nocedal J.* Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // SIAM J. Optimization. 1992. Vol. 2, № 1. P. 21–42.
101. *Glasko V.B.* Inverse problems of mathematical physics. New York: American Institute of Physics, 1988. 108 p.
102. *Hajime I.* Numerical simulation of thermal convection in a fluid with the infinite Prandtl number and its application to a glass manufacturing problem // Hiroshima Math. J. 1999. V. 29, № 1. P. 27–60.
103. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer, 2005. 358 p.
104. *Ismail-Zadeh A., Honda S., Tsepelev I.* Linking mantle upwelling with the lithosphere descent and the Japan Sea evolution: a hypothesis // Sci. Rep. 2013. Vol. 3. P. 1137. doi: 10.1038/srep01137.
105. *Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Schubert G., Tsepelev I.* Quasi-reversibility method for data assimilation in models of mantle dynamics // Geophys. J. Int. 2007. V. 170. P. 1381–1398.

106. *Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A.* Inverse problem of thermal convection: Numerical approach and application to mantle plume restoration // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2004. V. 145. P. 99–114.
107. *Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A.* Three-dimensional forward and backward numerical modeling of mantle plume evolution: Effects of thermal diffusion // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. P. B06401. doi:10.1029/2005JB003782, 2006.
108. *Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A.* Thermal evolution and geometry of the descending lithosphere beneath the SE-Carpathians: An insight from the past // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2008. V. 273. P. 68–79.
109. *Ismail-Zadeh A.T., Tsepelev I.A., Talbot C.J., Korotkii A.I.* Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: Numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // *Tectonophysics.* 2004. V. 387. P. 81–103.
110. *Korotkii A., Kovtunov D., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O.* Quantitative approach to reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements // *Geophys. J. Int.* 2015. Accepted for publication.
111. *Lobkovsky L.I., Ismail-Zadeh A.T., Krasovsky S.S., Kuprienko P.Ya., Cloetingh S.* Origin of gravity anomalies and possible forming mechanism of the Dnieper-Donets Basin // *Tectonophysics.* 1996. V. 268. P. 281–292.
112. *Lukaszewicz G., Rojas-Medar M., Santos M.* Stationary micropolar fluid flows with boundary data in L_3 // *J. Math. Anal. Appl.* 2002. Vol. 271, № 1. P. 91–107.
113. *More J.J., Thuente D.L.* Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease // *ACM Trans. Math. Software.* 1994. Vol. 20. P. 286–307.
114. *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical optimization. New York: Springer, 1999. 664 p.

- 115. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000. 723 p.
- 116. *Schechter M.* Mixed boundary problem for general elliptic equations // Comm. Pure and App. Math. 1960. V. 13. P. 331–354.
- 117. *Villamizar-Rao E.J., Rodriguez-Bellido M.F., Rojas-Medar M.A.* The Boussinesq system with mixed nonsmooth boundary data // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2006. V. 343. P. 191–196.

Научное издание

Короткий Александр Илларионович
Стародубцева Юлия Владимировна

Моделирование прямых и обратных граничных
задач для стационарных моделей
теплообмена

Монография

Ответственный за выпуск	Д. Д. Шакирзянова
Редактор	Е. Е. Крамаревская
Оригинал-макет	Ю. В. Стародубцева

Подписано в печать 20.11.2015.

Формат 60×84 1/16. Бумага писчая.

Уч.-изд. л. 9.81. Усл. печ. л. 9.76. Тираж 100 экз. Заказ 465.

Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13

Факс: +7 (343) 358-93-06

E-mail: press-urfu@mail.ru

